Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

12. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

21. Januar 2019

Abgabe bis 28. Januar 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 45:

(i) Der Weg γ umlaufe den Rand der Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 1 \leq y \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ x - x^3 \geq y \geq 0\}$$

einmal in positiver Richtung. Skizzieren Sie die Menge B und berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma (y^2\,dx\ + (2xy + x)\,dy)$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die angegebene Menge zulässig ist.

(ii) Jetzt umlaufe γ den Einheitskreis einmal in positiver Richtung. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} \sin(x^3) - x^2y^3 \\ \frac{3}{5}x^5 + \log(1+y^2) \end{pmatrix} \cdot\ d(x,y).$$

Aufgabe 46 (K):

(i) Es seien $0 < r < R$ und

$$\Phi\colon [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto ((R + r\cos(v))\cos(u),\ (R + r\cos(v))\sin(u),\ r\sin(v)).$$

Dann ist $\Phi|_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ die Oberfläche des Torus aus Aufgabe 31 (iii). Berechnen Sie den Flächeninhalt $I(\Phi|_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]})$ von Φ.

(ii) Der Weg γ durchlaufe den Schnitt des Zylindermantels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 1\}$ einmal in positivem Sinne. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma (-y^3\,dx\ + x^3\,dy\ - z^3\,dz)$$

einmal direkt und einmal mit dem Integralsatz von Stokes.

Aufgabe 47:

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$, $p \in [1,\infty)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(X)$, sowie $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Man sagt, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert schwach* gegen f, wenn

$$\int_X f_k\varphi\,dx \to \int_X f\varphi\,dx \qquad (k \to \infty)$$

für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ mit $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ gilt.

Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz $\|f_k - f\|_p \to 0$ für $k \to \infty$ auch die schwache Konvergenz folgt.

Aufgabe 48 (K):

(i) Für welche $p \in [1, \infty]$ sind die folgenden Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ Elemente von $\mathcal{L}^p(X)$?

(a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$.

(b) $X = \mathbb{R}^3$, $f(x) := (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $X = U_1(0) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $f(x) := |x|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Es seien $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$, $p, p' \in [1, \infty]$ mit $p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Beweisen Sie die Identität

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg \, dx \colon g \in \mathcal{L}^{p'}(X) \text{ mit } \|g\|_{p'} = 1 \right\}.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $p > 1$ und $p = 1$. Im Fall $p > 1$ ist die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \frac{|f(x)|^p}{f(x)} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

hilfreich. Im Fall $p = 1$ kann zum Beispiel die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

betrachtet werden.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.