Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

13. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

28. Januar 2019

Abgabe bis 4. Februar 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 49 (K):

(i) Es seien $X = (0,\infty)$ und $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für welche $p \in [1,\infty]$ liegen die Äquivalenzklassen $\hat{f}_n$, $n \in \mathbb{N}$, in $L^p(X)$? Für welche p konvergiert $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(X)$?

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$. Weiter seien $p,q,r \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, sowie $\hat{f} \in L^p(X)$ und $\hat{g} \in L^q(X)$ mit Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$. Weiter sei $\hat{f}\hat{g} := \widehat{fg}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{f}\hat{g} \in L^r(X)$ ist und $\|\hat{f}\hat{g}\|_r \leq \|\hat{f}\|_p \|\hat{g}\|_q$ gilt.
Hinweis: Eine Fallunterscheidung zwischen den Fällen
(1) $p = q = \infty$, (2) $p = \infty,\ q \in [1,\infty)$ oder $p \in [1,\infty),\ q = \infty$, (3) $p, q \in [1,\infty)$
kann hilfreich sein.

(b) Weiter sei $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(X)$ mit $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \to 0$ für $n \to \infty$ und $(\hat{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^q(X)$ mit $\|\hat{g}_n - \hat{g}\|_q \to 0$ für $n \to \infty$. Folgern Sie die Konvergenz $\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\|_r \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 50 (K):

(i) Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $f \in \mathrm{C}^1([a,b])$ mit $f(a) = f(b) = 0$ und $p, p' \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es gilt $\left\|f^2\right\|_\infty \leq \|f\|_p \|f'\|_{p'}$.
(2) Es gilt $\|f\|_2 \leq C \|f'\|_2$ mit einer Konstante $C > 0$, die nur von der Differenz $b - a$ abhängt.
(3) Ist f zusätzlich in $\mathrm{C}^2([a,b])$, so gilt $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_p \|f''\|_{p'}$.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $p \in [1,\infty)$. Ferner seien $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(X)$, $\hat{f}, \hat{g} \in L^p(X)$ mit $\int_X \hat{f}_n\hat{\varphi}\,dx \to \int_X \hat{g}\hat{\varphi}\,dx$ und $\int_X \hat{f}_n\hat{\varphi}\,dx \to \int_X \hat{f}\hat{\varphi}\,dx$ für $n \to \infty$ für alle $\hat{\varphi} \in L^{p'}(X)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Beweisen Sie, dass dann $\hat{f} = \hat{g}$ gilt.

Hinweis: Sie können Aufgabe 48 (ii) verwenden.

Aufgabe 51:

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$, $p, q \in [1,\infty)$ und $Y := L^p(X) \cap L^q(X)$.

(i) Für $\hat{f} \in Y$ definieren wir $\|\hat{f}\|_Y := \sqrt{\|\hat{f}\|_p^2 + \|\hat{f}\|_q^2}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist.

(ii) Seien nun $X = \mathbb{R}$, $p < q$ und $\hat{f} \in Y$. Gegeben sei die Folge $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\hat{f}_n(x) := n^{\frac{1}{p}}\hat{f}(nx)$ für $x \in X$. Untersuchen Sie mithilfe dieser Folge, ob die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf Y äquivalent sind.

Aufgabe 52:
Es seien $d, \tilde{d} \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $Y \in \mathfrak{B}_{\tilde{d}}$ beschränkt, $Y \neq \emptyset$, sowie $p, q \in (1, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(Y)$. Weiter sei eine messbare Funktion $K\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$M := \left(\int_X \left(\int_Y |K(x,y)|^{p'} \, dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

(i) Zeigen Sie, dass es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{B}_d$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

  (1) Für alle $x \in X \setminus N$ ist die Abbildung $Y \ni y \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}^{p'}(Y)$.

  (2) Für alle $x \in X \setminus N$ ist das Integral $\int_Y K(x,y) f(y) \, dy$ endlich.

(ii) Sei nun $Tf\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(Tf)(x) := \begin{cases} \int_Y K(x,y) f(y) \, dy, & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass Tf messbar ist. Zeigen Sie ferner, dass $Tf \in \mathcal{L}^q(X)$ und $\|Tf\|_q \leq M \|f\|_p$ gilt.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.