Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

14. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

4. Februar 2019

Aufgabe 53:
Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$, sowie $p, q \in [1, \infty)$ und $Y := L^p(X) \cap L^q(X)$.

(i) Für $f \in Y$ setzen wir $\|f\|_Y := \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist.

(ii) Es sei $f \in L^p(X)$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y existiert mit $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 54:
Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ mit

1. $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$,
3. $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1, 1]$,

sowie $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ (siehe Aufgabe 29).

(i) Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp}(\varphi_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ sowie $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = 1$.

(b) Für jedes offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ gilt $\int_{\mathbb{R}\setminus I} \varphi_n(x)\,dx \to 0$ für $n \to \infty$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n * f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\|\varphi_n * f\|_1 \leq \|f\|_1$.

(iii) Es gilt $\|\varphi_n * f - f\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$ existiert mit $\|g - f\|_1 < \varepsilon$ und betrachten Sie für $\delta > 0$:

$$(\varphi_n * g)(x) - g(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(y)(g(x-y) - g(x))\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} \varphi_n(y)(g(x-y) - g(x))\,dy.$$

Aufgabe 55:

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sowie $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $F'(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ für $x \in [a,b]$. Zeigen Sie:

(a) Sind $u, v \in \mathrm{R}[a,b]$, so gilt $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

(b) Ist $F \in \mathrm{C}^1([a,b])$, so gilt $u, v \in \mathrm{R}[a,b]$.

(ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $G(x) := \mathrm{e}^{xz}$ stetig differenzierbar ist mit $G'(x) = z\mathrm{e}^{xz}$ für $x \in [a,b]$ und berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{xz}\,dx$.

Aufgabe 56:

(i) Berechnen Sie die Fourierreihe der *Sägezahnfunktion* $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\pi - x)$.

(ii) Es sei $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)(\pi^2 - x^2) + \mathbb{1}_{[\pi,2\pi]}(x)(\pi^2 - (2\pi - x)^2)$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(iii) Benutzen Sie (i) und (ii) zur Bestimmung der Werte der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Aufgabe 57:
Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ einen Hilbertraum.

(i) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *orthonormale Folge* in H (das heißt $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$ für $j,k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) Sei $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in H. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $H_n := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ und

$$P_n : H \to H_n,\ u \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Zeigen Sie, dass P_n stetig auf H ist, $P_n^2 = P_n$, $\operatorname{Bild}(P_n) = H_n$ und die Symmetrieeigenschaft $\langle u, P_n v\rangle = \langle P_n u, v\rangle$ $(u, v \in H)$ gilt. Folgern Sie

$$\langle u - P_n u, v\rangle = 0 \quad (u \in H,\ v \in \operatorname{Bild}(P_n)).$$

P_n ist also eine orthogonale Projektion.

Hinweis: Übertragen Sie die Besselsche Ungleichung auf den vorliegenden Fall.

(iii) Sei $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem auf H. Die Menge $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ heißt *Orthonormalbasis* von H, wenn jedes $u \in H$ die in H konvergente Reihendarstellung

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k$$

besitzt. Beweisen Sie, dass $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ genau dann eine Orthonormalbasis von H ist, wenn die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_k\rangle|^2$$

für jedes $u \in H$ gilt. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die auf H durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm.

Hinweis: Verwenden Sie die Besselsche Ungleichung aus Teil (ii).

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.