Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

1. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

29. April 2019

Abgabe bis 6. Mai 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:

(i) Es sei $g\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \frac{z+|z|}{\sqrt{\operatorname{Re}(z)+|z|}}.$$

Zeigen Sie, dass g holomorph ist und bestimmen Sie g'.

(ii) Es seien $D\subseteq\mathbb{C}\setminus\{0\}$ offen und $f\colon D\to\mathbb{C}$ reell differenzierbar. Weiter seien

$$G := \{(r,\varphi)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\colon r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))\in D\}$$

und $F\colon G\to\mathbb{C}$, $F(r,\varphi) := f(r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)))$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn für alle $(r,\varphi)\in G$ gilt

$$r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)+\mathrm{i}\frac{\partial F}{\partial\varphi}(r,\varphi)=0.$$

Aufgabe 2 (K):

(i) Es seien $D\subseteq\mathbb{C}$ offen und nicht-leer, sowie $z_0\in D$ und $f\colon D\to\mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann in z_0 komplex differenzierbar ist, falls die Funktion $f^*\colon D^*\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\overline{f(\overline{z})}$ mit $D^* := \{z\in\mathbb{C}\colon \overline{z}\in D\}$ in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie jeweils alle $z\in D$ in denen die Funktion $f\colon D\to\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

(a) $D:=\mathbb{C}$, $f(z):=z\operatorname{Im}(z)$,

(b) $D:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z):=\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}$,

(c) $D:=\mathbb{C}$, $f(z):=\operatorname{Re}(z)\left(\operatorname{Re}(z)^2-3\operatorname{Im}(z)^2\right)+\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)\left(3\operatorname{Re}(z)^2-\operatorname{Im}(z)^2\right)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$ für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$$

konvergiert, bzw. absolut konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\sum_{n=0}^{N}a_nb_n = a_N\left(\sum_{n=0}^{N}b_n\right)+\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)(a_n-a_{n+1})$$

für alle $N\in\mathbb{N}$ und für komplexwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt.

Aufgabe 4 (K):
Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert. Zeigen Sie:

(i) Falls ein $q \in [0, \frac{\pi}{2})$ existiert mit $|\operatorname{Arg}(z_n)| \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ auch absolut.

(ii) Bleibt die Behauptung in (i) richtig, wenn man nur $|\operatorname{Arg}(z_n)| < \frac{\pi}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert?

(iii) Ist zusätzlich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$, aber im Allgemeinen nicht die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

Information

Alle Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der folgenden Homepage

`http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/ana42019s/de`