Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

2. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

6. Mai 2019

Abgabe bis 13. Mai 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 5:
Zeigen Sie die folgenden Charakterisierungen der Logarithmen und n-ten Wurzeln von $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Die Logarithmen von w sind gegeben durch

$$z_k = \log |w| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} w + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Folgern Sie daraus, dass für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r > 0$ die Gleichung $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = w$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leq r$ besitzt.

(ii) Die n verschiedenen n-ten Wurzeln von w sind gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\operatorname{Arg} w + 2\pi k}{n}\right), \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Aufgabe 6 (K):
Durch die Definition des Hauptzweiges des Logarithmus können wir, in Konsistenz mit der entsprechenden Rechenregel im reellen Fall, den *Hauptzweig der allgemeinen Potenzen* definieren. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sei

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z).$$

Für $\alpha = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ lässt sich so der *Hauptzweig der n-ten Wurzel* definieren.

(i) Wie lautet ein möglicher Definitionsbereich der Funktion $f(z) = z^n$, damit der eben definierte Hauptzweig der n-ten Wurzel mit der Umkehrfunktion f^{-1} übereinstimmt (vgl. Satz 4.2)?

(ii) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

(a) $z_1 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$,

(b) $z_2 = \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^\mathrm{i})}$.

Aufgabe 7:
Berechnen Sie für den Weg γ und die Funktion $f \colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\, dz$:

(i) $f(z) := z \operatorname{Re} z$ und γ der Weg von 0 nach $1 + \mathrm{i}$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$,

(ii) $f(z) := |z|^2$ und γ der Weg, der den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten 0, 1 und i ein Mal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft,

(iii) $f(z) := z^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(t) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und ein $R > 0$,

(iv) $f(z) := \frac{\exp(z) - 1}{z}$ und $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$,

(v) $f(z) := \overline{z}^2$ und $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $L(\gamma) = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 8 (K):

(i) Beweisen Sie das Lemma von Jordan:
Für $R > 0$ sei $\gamma_R \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Ferner sei f stetig auf $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ für ein $R_0 > 0$ und es gelte entweder

(1) $\alpha > 0$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \max\{|f(z)| : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\} = 0$,

oder

(2) $\alpha = 0$ und $\lim\limits_{R\to\infty} R \cdot \max\{|f(z)| : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\} = 0$.

Dann gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\, dz = 0.$$

(ii) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma_\varepsilon \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) := z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: Ist g komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, sowie stetig in $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0}\, dz = \mathrm{i}\pi g(z_0).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \mathrm{i}\pi$.