3. Übungsblatt

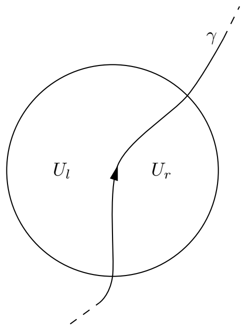
zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

13. Mai 2019

Abgabe bis 20. Mai 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 9 (K):

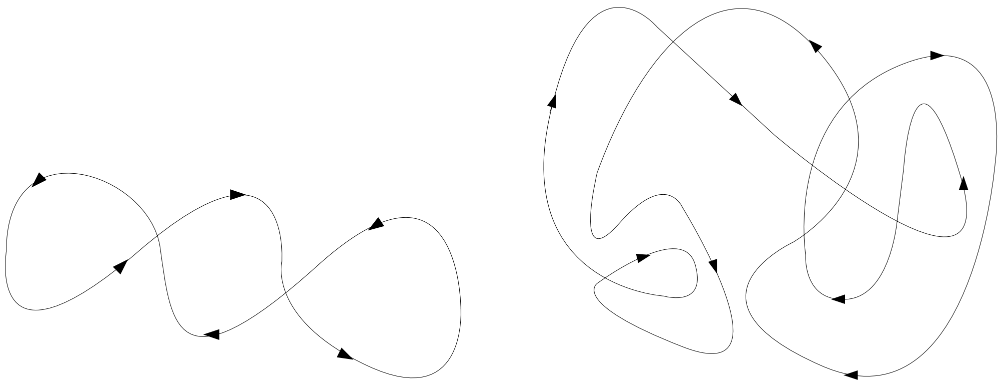
(i) Es seien $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg, der die Kreisscheibe $U_R(z_0)$ in zwei Mengen U_l (links des Weges) und U_r (rechts des Weges) zerteilt und auf $\gamma^{-1}(\overline{U_R(z_0)})$ injektiv ist. Es gilt also insbesondere $U_l \dot\cup U_r = U_R(z_0) \setminus |\gamma|$.



Zeigen Sie, dass für alle $z_l \in U_l$, $z_r \in U_r$ gilt:

$$\mathrm{n}(\gamma, z_l) = \mathrm{n}(\gamma, z_r) + 1.$$

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden Wege γ jeweils die Umlaufzahl $\mathrm{n}(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.



(iii) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $D \in \mathbb{C}$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

Aufgabe 10:
Für $R > 0$ seien die Wege $\gamma_{1,R}, \gamma_{2,R}, \gamma_{3,R} \colon [0,R] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma_{1,R}(t) := t, \qquad \gamma_{2,R}(t) := R + \mathrm{i}t, \qquad \gamma_{3,R}(t) := t(\mathrm{i}+1).$$

(i) Beweisen Sie:

$$\int_{\gamma_{3,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz = \int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz.$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

(iii) Berechnen Sie den Wert der *Fresnel-Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx,$$

indem Sie in (i) den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

Aufgabe 11 (K):

(i) Es seien $r > 0$ und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < r < |b|$, sowie $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-b}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz$

(ii) Es seien $a, b > 0$ und $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \mathrm{e}^{-z^2}$. Zeigen Sie, dass bei festem b die Wegintegrale von f über die vertikalen Seiten des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm a$, $\pm a + \mathrm{i}b$ für $a \to \infty$ gegen 0 konvergieren, und folgern Sie

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2bx)\,dx = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-b^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Cauchyschen Integralsatz.

Aufgabe 12:

(i) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $L \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade und $f \in C(D) \cap H(D \setminus L)$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Morera, dass $f \in H(D)$ gilt.

(ii) Existiert eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$, sodass $f(\frac{1}{n}) = \mathrm{e}^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?