Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

4. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

20. Mai 2019

Abgabe bis 27. Mai 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 13:
Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) $f(k) = k^2$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 14 (K):
Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g \in H(D)$ nicht konstant Null und $z_0 \in D$ eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $m \in \mathbb{N}$ von f bzw. g (Ordnung 0 für f bedeutet, dass f in z_0 keine Nullstelle besitzt). Zudem sei $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ für alle $z \in D \setminus Z(g)$. Zeigen Sie

(i) Ist $n \geq m$, so besitzt die Funktion h in z_0 eine hebbare Singularität, in der sie durch

$$h(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

holomorph fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n - m$.

(ii) Ist $n < m$, so besitzt h in z_0 einen Pol der Ordnung $m - n$.

Aufgabe 15:
Bestimmen Sie alle Werte $z \in \mathbb{C}$, für die die folgende Funktion nicht definiert ist:

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)\left(e^{z-i} - 1\right)^2}{(z-3)^5 (z-i) \cos\left(\frac{1}{z+1}\right)\left(z - \frac{1}{\pi}\right)}.$$

Klassifizeren Sie alle isolierten Singularitäten, die sich unter diesen Werten befinden. Geben Sie weiter alle Nullstellen der Funktion, bzw. ihrer holomorphen Fortsetzung an. Bestimmen Sie bei Polen und Nullstellen auch deren Ordnung.

Hinweis: Sie können Aufgabe 14 benutzen.

Aufgabe 16 (K):

(i) Es sei $\gamma\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \gamma(t) = 2 + 3e^{it}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{e^{i\pi z^2}}{(z - 2i)^3}\, dz.$$

(ii) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(e^{2it} - 3it)\, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\, dt$ für $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{it}$ und $f \in C(\partial U_1(0))$ gilt

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt = \int_\gamma \frac{f(z)}{iz}\, dz.$$