Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

5. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

27. Mai 2019

Abgabe bis 3. Juni 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 17 (K):

(i) Zeigen Sie, dass keine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert.

(ii) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

(iii) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion f genau dann ein Polynom vom Grad höchstens n ist, wenn Konstanten $a, b > 0$ existieren mit

$$|f(z)| \leq a + b\,|z|^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 18:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zu jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ von f um z_0 mindestens ein $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $a_n = 0$ ist. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

(ii) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$, ein beschränktes Gebiet. Ferner sei die Funktion $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, sowie in G holomorph und nullstellenfrei. Weiter gebe es eine Konstante $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \partial G$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(iii) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht-konstante Funktion, so gilt für jedes $c > 0$:

$$\overline{\{z \in \mathbb{C}\colon |f(z)| < c\}} = \{z \in \mathbb{C}\colon |f(z)| \leq c\}\,.$$

Gilt diese Mengengleichheit auch, falls f nur als stetig vorausgesetzt ist?

Aufgabe 19 (K):

Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$.

(i) Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der Funktion $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ auf der Menge $\overline{\mathbb{D}}$.

(a) $f(z) := \mathrm{e}^{z^2}$, (b) $f(z) := z^2 + \mathrm{i}z + 1$.

(ii) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in H(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial\mathbb{D}$, f jedoch nicht konstant auf G, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{D}$.

(iii) Seien $f, g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bijektiv mit $f, g \in H(\mathbb{D})$ sowie $f(0) = g(0) = 0$ und entweder $f'(0) = g'(0)$ oder $f(z_0) = g(z_0)$ für ein $z_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $g^{-1} \circ f$ und $f^{-1} \circ g$.

Aufgabe 20:

(i) Es seien $S := \left\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ und $f\colon S \to \mathbb{C}$, $f(z) := \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})$. Zeigen Sie, dass $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial S$ gilt, aber f dennoch unbeschränkt ist.

(ii) Es seien $G := \left\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\right\}$ und $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \exp(-\mathrm{e}^{z})$. Zeigen Sie, dass $f(\overline{G})$ beschränkt ist. Besitzt die Menge $\left\{|w|\colon w \in f(\overline{G})\right\}$ ein Minimum?