Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

6. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

3. Juni 2019

Abgabe bis 11. Juni 2019, 09:00 Uhr

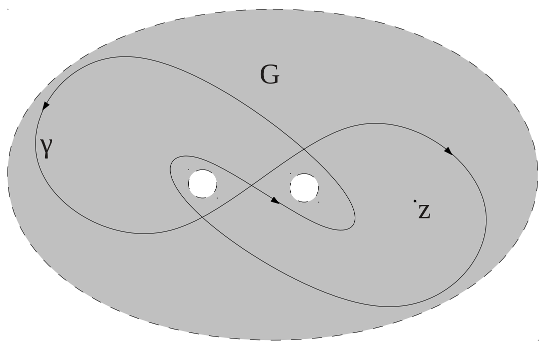
Aufgabe 21 (K):

(i) Es sei $D := \left\{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{C},\ f(z) := z \sin(z)$$

injektiv ist.

(ii) Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $G \neq \emptyset$ und der stückweise stetig differenzierbare Weg γ in G wie in folgendem Bild gegeben (Die weißen Kreise gehören nicht zu G):



Ferner sei $f \in H(G)$. Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ (mit Begründung)

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Aufgabe 22:

Auf der Menge $H(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen seien für $k \in \mathbb{N}$ die Halbnormen $\|\cdot\|_k$ durch $\|f\|_k := \max_{|z| \leq k} |f(z)|$ definiert. Zeigen Sie:

(i) Durch

$$d \colon H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C}) \to \mathbb{R},\ d(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_k}{1 + \|f-g\|_k}$$

wird eine Metrik auf $H(\mathbb{C})$ definiert

(ii) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H(\mathbb{C})$ konvergiert genau dann lokal gleichmäßig gegen ein $f \in H(\mathbb{C})$, wenn $d(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$.

(iii) Der metrische Raum $(H(\mathbb{C}), d)$ ist vollständig.

(iv) Für $k \in \mathbb{N}$ definiert $\|\cdot\|_k$ sogar eine Norm auf $H(\mathbb{C})$, der Raum $(H(\mathbb{C}), \|\cdot\|_k)$ ist jedoch nicht vollständig.

Aufgabe 23 (K):
Es seien Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in H(\Omega)$ und $f \not\equiv 0$.

(i) Zeigen Sie, dass f genau dann einen holomorphen Logarithmus besitzt, wenn f für alle $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe n-te Wurzel besitzt.

(ii) Bleibt die Aussage in (i) richtig, falls Ω nicht einfach zusammenhängend ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 24:
Finden Sie alle Paare ganzer Funktionen f und g mit $f^2 + g^2 = 1$.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 10.3 und die Faktorisierung $f^2 + g^2 = (f + \mathrm{i}g)(f - \mathrm{i}g)$.