Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

7. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

10. Juni 2019

Abgabe bis 17. Juni 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 25 (K):

(i) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, offen und $z_0 \in D$. Ferner habe die Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ bezeichne.

(ii) Es sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)(z-1)^2}\, dz.$$

Aufgabe 26 (K):

(i) (a) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^4 - 3z + 1$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D}$.

(b) Es sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Information aus (i) das Integral

$$\int_\gamma \frac{4z^3 - 3}{z^4 - 3z + 1}\, dz.$$

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^4 + z^3 - 4z + 1$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in der Menge $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 3\}$.

Aufgabe 27 (K):

(i) Es seien p und q Polynome mit $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Ferner habe die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus Z(q) \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$$

auf der reellen Achse keine Pole. Beweisen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(f, z).$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 28:

(i) Es seien p und q Polynome in zwei Variablen, $r\colon \mathbb{C}^2 \setminus \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon q(z) \neq 0\right\} \to \mathbb{C}$, $r := \frac{p}{q}$ und die Funktion

$$t \mapsto r(\cos(t), \sin(t))$$

sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (dies ist zum Beispiel der Fall, falls q auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Ferner seien

$$f(z) := \frac{1}{z} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

und $z_1, \ldots, z_n$ die Pole von f in $\mathbb{D}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t))\, dt = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1 + \cos(t)}\, dt = \pi.$$