Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

8. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

17. Juni 2019

Abgabe bis 24. Juni 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 29:
Es sei $(V, \|\cdot\|)$, $V \neq \{0\}$, ein normierter Raum. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in V$ linear unabhängig. Dann existieren $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq C_2 \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \qquad \text{für alle } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

(ii) Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim W < \infty$, so ist W abgeschlossen.

(iii) *Lemma von Riesz:* Ist $W \subsetneq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum von V, so existiert zu jedem $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $v \in V \setminus W$ mit $\|v\| = 1$ und $\|v - w\| \geq 1 - \varepsilon$ für alle $w \in W$.

Aufgabe 30 (K):
Es sei $(V, \|\cdot\|)$, $V \neq \{0\}$, ein normierter Raum und $K := \overline{U_1(0)} = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\dim V < \infty$.

(ii) Jede Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K besitzt eine konvergente Teilfolge $(y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} \in K$, d.h. K ist kompakt.

(iii) Jede beschränkte Folge in V besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweis: Sie können Aufgabe 29 verwenden.

Aufgabe 31:

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$, $f(t) := \mathrm{e}^{tA}$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist mit $f'(t) = A\mathrm{e}^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathrm{e}^{tA}B = B\mathrm{e}^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $AB = BA$ gilt.

(iii) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte. Zeigen Sie, dass $AB = BA$ gilt.

(iv) Finden Sie $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ und $I = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.

Aufgabe 32 (K):
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Die (von $\|\cdot\|$) induzierte Operatornorm ist durch

$$\|A\|_{op} = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\| = 1\}$$

für jedes $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass die induzierte Operatornorm eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist.

(ii) Es sei $\mathbb{K}^n$ mit der Betragssummennorm $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$ für $x \in \mathbb{K}^n$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass die von $\|\cdot\|_1$ induzierte Operatornorm durch die Spaltensummennorm

$$\|A\|_{op} = \|A\|_1 := \max_{1,\leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}| \qquad \text{für } A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

gegeben ist.

(iii) Es bezeichne $\|\cdot\|_F$ die Frobeniusnorm aus der Vorlesung und $\|\cdot\|_{op}$ die durch die euklidische Norm induzierte Operatornorm.

(a) Zeigen Sie, dass $\|A\|_{op} \leq \|A\|_F$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen $\|A\|_{op} \neq \|A\|_F$ gilt.

(c) Zeigen Sie:

$$\|A\|_{op} = \|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \qquad \text{für } A \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

wobei $A^* = \overline{A}^T$ die adjungierte Matrix und $\lambda_{\max}(C)$ den maximalen Eigenwert der hermiteschen Matrix C bezeichne.