Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

9. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

24. Juni 2019

Abgabe bis 1. Juli 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 33:
Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Gronwall:
Es seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $\alpha\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $\beta\colon [a,b) \to [0,\infty)$ stetig. Ferner sei $\varphi\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\varphi(t) \le \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b).$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \le \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\,ds\right) \qquad \text{für alle } t \in [a,b).$$

Aufgabe 34 (K):

(i) Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(t_0) = y_0$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall $(\omega_-(y_0), \omega_+(y_0))$ an.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$. Die Funktion $\psi \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$\psi'(t) < f(t,\psi(t)) \qquad \text{für alle } t \in (a,b].$$

Außerdem seien $y_0 > \psi(a)$ und $y \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t,y(t)), \qquad y(a) = y_0.$$

Zeigen Sie, dass $\psi(t) < y(t)$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

Hinweis: Die analoge Aussage gilt, wenn alle man alle Ungleichungszeichen umkehrt.

(iii) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = t^2 + x(t)^2, \qquad x(0) = 0.$$

(a) Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

(b) Im Gegensatz zu Teil (i) gelingt es hier nicht, eine Lösung explizit auszurechnen. Zeigen Sie jedoch mit Hilfe von Teil (ii), dass die maximale Existenzzeit dieses Anfangswertproblems den Abschätzungen

$$1 < \omega_+ \le 1 - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$$

genügt, indem Sie die beiden Probleme

$$y'(t) = 1 + y^2(t), \qquad y(0) = \tan(\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ hinreichend klein) bzw.

$$y'(t) = 1 + y^2(t), \qquad y(1) = \frac{1}{3}$$

betrachten.

Aufgabe 35 (K):
Es seien $p \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^p$ mit der euklidischen Norm $|\cdot|$ versehen. Ferner sei $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.

(i) Es seien $R > 0$ und $u_0 \in U_R(0)$ und es gelte

$$f(t,x) \cdot x < 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty),\ x \in \partial U_R(0).$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u_0,$$

eine eindeutige Lösung $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^p$ besitzt, die außerdem in $\overline{U_R(0)}$ verläuft.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(t) = |u(t)|^2$.

(ii) Zeigen Sie die gleiche Aussage wie in Teil (i) unter der schwächeren Voraussetzung

$$f(t,x) \cdot x \leq 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty),\ x \in \partial U_R(0).$$

Hinweis: Betrachten Sie $f_n(t,x) = f(t,x) - x/n$ und vergleichen Sie die Lösungen zu den rechten Seiten f_n und f mit Hilfe des Lemmas von Gronwall.

Aufgabe 36:
Es sei $T > 0$. Eine Funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-*periodisch*, wenn $v(t+T) = v(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(i) Es sei $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x und für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $t \mapsto f(t,x)$ eine T-periodische Funktion. Ferner sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz

$$u \text{ ist } T\text{-periodisch} \quad \Leftrightarrow \quad u(0) = u(T).$$

(ii) Es seien $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-periodisch und $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = g(t)u(t), \qquad u(0) = u_0$$

genau dann T-periodisch ist, wenn $\int_0^T g(s)\,ds = 0$ gilt.

(iii) Es sei $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-periodisch mit $\int_0^T g(s)\,ds = 0$. Zusätzlich sei $h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig und es gebe $a < b$ mit $h(a) = 0 = h(b)$, sowie $u_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = g(t)h(u(t)), \qquad u(0) = u_0$$

T-periodisch ist.

(iv) Es sei $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x und für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $t \mapsto f(t,x)$ T-periodisch. Außerdem gebe es $a < b$ mit $f(t,a) > 0$ und $f(t,b) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zu $u_0 \in [a,b]$ sei das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$u'(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie, dass es einen Anfangswert $u_0 \in [a,b]$ derart gibt, dass die Lösung u des Anfangswertproblems eine T-periodische Funktion ist.

Hinweis: Suchen Sie einen Fixpunkt der Abbildung $u_0 \mapsto u(T;u_0)$ in $[a,b]$, wobei $u(\cdot;u_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems zum Anfangswert $u(0) = u_0 \in [a,b]$ auf ihrem maximalen Existenzintervall bezeichne.