Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

10. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

1. Juli 2019

Abgabe bis 8. Juli 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 37 (K):
Gegeben sei für $t \geq 0$ das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y(t), \\ y'(t) &= x(t)^2 - 1. \end{aligned}$$

(i) Finden Sie ein (nicht-konstantes) erstes Integral des Systems.

(ii) Zeigen Sie, dass der Anfangswert $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ eine periodische Lösung liefert.

(iii) Zeigen Sie, dass der Anfangswert $(x(0), y(0)) = (3, \sqrt{5})$ eine Lösung mit endlicher maximaler Existenzzeit (d.h. $\omega_+ < \infty$) liefert.

Aufgabe 38:

(i) Es sei $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig. Bestimmen Sie ein erstes Integral für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= g(x). \end{aligned}$$

(ii) (a) Formulieren Sie die Differentialgleichung

$$u'' = u + u^3 \tag{1}$$

als System erster Ordnung.

(b) Finden Sie für dieses System ein (nicht-konstantes) erstes Integral H. Skizzieren Sie einige Niveaulinien N_c von H.

(c) Zeigen Sie, dass für nicht-triviale Lösungen u von (1) gilt: $(u(t), u'(t)) \to 0$ für $t \to \infty$ oder u besitzt ein endliches maximales Existenzintervall.

Aufgabe 39:
In einem Beispiel in §3 wurde das Lotka-Volterra System

$$\begin{aligned} x' &= (1 - y)x, \qquad & x(0) &= x_0 > 0, \\ y' &= (-1 + x)y, \qquad & y(0) &= y_0 > 0, \end{aligned}$$

betrachtet. Ein erstes Integral lautet $H(x, y) = x - \log x + y - \log y$, die Orbits sind kompakt und damit sind die Lösungen periodisch mit einer gewissen Periode T.

Zeigen Sie, dass die zeitlichen Mittelwerte von x und y über eine Periode unabhängig vom Orbit sind, dass also stets

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = 1$$

gilt.

Aufgabe 40 (K):
Ein Modell für die Konkurrenzbeziehung zwischen zwei Spezien ist das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = (1 - ax(t) - y(t))x(t),$$
$$y'(t) = (c - by(t) - x(t))y(t),$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 \geq 0$ und $y(0) = y_0 \geq 0$ sowie Parametern $a, b, c > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass zu jeder Anfangsbedingung $x_0 \geq 0$ und $y_0 \geq 0$ eine eindeutige Lösung

$$(x, y)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$$

existiert, die $x(t) \geq 0$ und $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ erfüllt.

(ii) Es gelte $c > \frac{1}{a}$ und $1 > \frac{c}{b}$. Bestimmen Sie alle Equilibria des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.