Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

11. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

8. Juli 2019

Abgabe bis 15. Juli 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 41 (K):
Es seien $\beta, \rho, \sigma > 0$. Ferner sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= \rho x - y - xz, \\ z' &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

die sogenannte *Lorenz-Gleichung*, gegeben.

(i) Bestimmen Sie alle stationären Punkte (in Abhängigkeit von ρ).

(ii) Zeigen Sie, dass der stationäre Punkt $(0, 0, 0)$ im Fall $\rho < 1$ asymptotisch stabil und im Fall $\rho > 1$ instabil ist.

(iii) Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass jeder von $(0, 0, 0)$ verschiedene stationäre Punkt u_0 für $\rho \in (1, 1 + \varepsilon)$ asymptotisch stabil sind.

Hinweis: Berechnen Sie das charakteristische Polynom p_ρ von $f'(u_0)$. Bestimmen sie die Nullstellen von p_1 und untersuchen Sie, was im Fall $\rho > 1$ passiert.

Aufgabe 42 (K):
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + x(t)y(t) - (x(t) + y(t))\big(x(t)^2 + y(t)^2\big)^{1/2}, \\ y'(t) &= y(t) - x(t)^2 + (x(t) - y(t))\big(x(t)^2 + y(t)^2\big)^{1/2}, \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Neben $(0, 0)$ ist $(1, 0)$ der einzige weitere stationäre Punkt (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

(i) Zeigen Sie, dass man die Lösung des obigen Anfangswertproblems dargestellt in Polarkoordinaten

$$x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \qquad \text{und} \qquad y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$$

durch Lösung des Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t)(1 - r(t)), \\ \varphi'(t) &= r(t)(1 - \cos(\varphi(t))), \end{aligned}$$

für r und φ erhält.

(ii) Zeigen Sie, dass jede Lösung gegen den stationären Punkt $(1, 0)$ konvergiert, $(1, 0)$ aber nicht stabil ist.

Aufgabe 43:
Gegeben sei das Verfolger-Beute Modell

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1 - ax(t) - y(t))x(t), \\ y'(t) &= (c - by(t) + x(t))y(t), \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 \geq 0$ und $y(0) = y_0 \geq 0$ sowie Parametern $a, b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $b > c > -\frac{1}{a}$.

(i) Zeigen Sie, dass es genau einen stationären Punkt (x_*, y_*) mit $x_* > 0$ und $y_* > 0$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass $V\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $V(x,y) := x - x_* - x_* \log(\frac{x}{x_*}) + y - y_* - y_* \log(\frac{y}{y_*})$ eine Lyapunov-Funktion des Systems ist.

Hinweis. Die Identitäten $ax_* + y_* = 1$ und $by_* - x_* = c$ können hilfreich sein.

(iii) Untersuchen Sie (x_*, y_*) auf Stabilität.

Aufgabe 44:
Es sei $\alpha \geq 0$. Finden Sie eine Lyapunov-Funktion für das System

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\alpha y - x, \end{aligned}$$

und untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0)$ auf Stabilität.

Anmeldung zur Klausur Analysis 4

Die Klausur Analysis 4 findet statt am **28.08.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **11.08.2019**.