Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

12. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

15. Juli 2019

Abgabe bis 22. Juli 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 45 (K):

(i) Finden Sie jeweils die eindeutige Lösung der folgenden Randwertprobleme

(a) $u''(x) + x^2 = 0 \quad (x \in [0,1]),$
$u(0) = 0,\ u(1) = 0,$

(b) $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = 0 \quad (x \in [0,1]),$
$u(0) + u'(0) = 1,\ u(1) = 0$

(ii) (a) Es seien $I := [a,b]$, $q \in C(I)$, $p \in C^1(I)$, $p > 0$. Ferner sei u_1 eine Lösung der Differentialgleichung $(pu')' + qu = 0$ und es gelte $u_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass man durch den Ansatz $u_2(x) = c(x)u_1(x)$ eine zweite linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung erhält. Bestimmen Sie c und u_2.

(b) Es sei $r \in C([1,2])$ und das folgende Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned}&(1+x^2)u''(x) + 2xu'(x) - 2u(x) = r(x) \quad (x \in [1,2]),\\&u(1) = 0,\ u(2) = 0.\end{aligned}$$

u_1 mit $u_1(x) = x$ für alle $x \in [1,2]$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung und zeigen Sie, dass das Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 46:
Bestimmen Sie sämtliche $\omega \geq 0$, für die das Randwertproblem

$$\begin{aligned}&u''(x) + \omega^2 u(x) = f(x) \quad (x \in [0,1]),\\&u(0) = 0,\ u'(1) = 0\end{aligned}$$

für jedes $f \in C([0,1])$ genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 47:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an die Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \eta_a, \eta_b \in \mathbb{R}$, sodass das folgende Randwertproblem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{aligned}&u''(x) = 0 \quad (x \in [a,b]),\\&\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_a,\\&\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_b.\end{aligned}$$

Aufgabe 48 (K):

(i) Bestimmen Sie ein zulässiges Fundamentalsystem zur Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &x\,u''(x) + u'(x) = 0 \quad (x \in [1, \mathrm{e}]), \\ &u(1) = u(\mathrm{e}) = 0 \end{aligned}$$

und gegeben Sie die Greensche Funktion an.

(ii) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &x\,u''(x) + u'(x) = 0, \quad (x \in [0, 1]), \\ &u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{aligned}$$

keine Lösung $u \in C^2([0,1])$ besitzt, obwohl das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung hat. Warum ist Satz 5.2 nicht anwendbar?

Anmeldung zur Klausur Analysis 4

Die Klausur Analysis 4 findet statt am **28.08.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **11.08.2019**.