Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

13. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2019

23. Juli 2019

Abgabe bis 30. Juli 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 49:
Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u''(t) + g(u(t)) = 0, \quad (t \in [0,1]), \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die sogenannte Schießmethode:
Zu den Anfangswerten $u(0) = 0$ und $u'(0) = a$ bezeichne $u(\cdot; a)$ die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems. Zeigen Sie, dass die Abbildung $a \mapsto u(1; a)$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 50 (K):
Bestimmen Sie sämtliche $\omega > 0$, sodass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u''(x) + \omega^2 u(x) = 0 \quad (x \in [0,1]), \\ &u(0) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung besitzt und berechnen Sie in diesem Fall die Greensche Funktion.

Aufgabe 51:
Es seien $a_0, a_1, a_2 \in C([a,b])$, $a_2(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$ und $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \eta_a, \eta_b \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. Ferner sei

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) \quad (x \in [a,b]), \\ R_a u &:= \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a), \\ R_v u &:= \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b). \end{aligned}$$

Weiter seien ϕ, ψ Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ mit $R_a\phi = 0$, $R_b\phi = 1$, $R_a\psi = 1$ und $R_b\psi = 0$, sowie $W\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Wronski-Determinante zu ϕ und ψ.

Zeigen Sie, dass die Green'sche Funktion zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= r, \\ R_a u &= \eta_a, \\ R_b u &= \eta_b \end{aligned}$$

gegeben ist durch

$$G(x,t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} \begin{cases} \phi(x)\psi(t), & a \le x \le t \le b, \\ \phi(t)\psi(x), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

Aufgabe 52 (K):
Es sei $I := [0, T)$ ein halboffenes Intervall, $\lambda \in \{1, -1\}$ und $1 < p < \infty$. Ferner sei die folgende nichtlineare Wellengleichung gegeben:

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda\, |u|^{p-1}\, u = 0 \quad ((t, x) \in I \times \mathbb{R}).$$

(i) Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie den Ansatz $u(t, x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} v(t)$ und leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für v her.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $\lambda = 1$ die Lösungen v dieser Differentialgleichung für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ auf $[0, \infty)$ existieren.

(iii) Berechnen Sie im Fall $\lambda = -1$ und $\xi = 0$ explizit eine Lösung, die ein maximales Existenzintervall $[0, \omega_+)$ mit $\omega_+ < \infty$ besitzt.

Anmeldung zur Klausur Analysis 4

Die Klausur Analysis 4 findet statt am **28.08.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **11.08.2019**.