Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis 4

28.08.2019

Aufgabe 1:

(i) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ in denen die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z|z|^2$ komplex differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

(ii) Gegeben sei der Weg $\gamma\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := 2(1 + \mathrm{e}^{it})$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-9)^2}\, dz.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) Behauptung: f ist nur in $z = 0$ komplex differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Beweis: Mit $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x^3 + xy^2 + \mathrm{i}(x^2y + y^3)$. Dann sind die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,y) := x^3 + xy^2, \qquad v(x,y) := x^2y + y^3 \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

stetig partiell differenzierbar. Damit ist $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Cauchy-Riemann-DGL genau dann erfüllt, wenn $xy = -xy$ und $x^2 = y^2$ gilt, also genau dann wenn $x = y = 0$ gilt, d.h. f ist genau in $z = 0$ komplex differenzierbar. Weiter gilt $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$. □

(ii) Behauptung: Es gilt $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-9)^2}\, dz = \frac{\pi}{27}\mathrm{i}$.

Beweis: Die Funktion $f\colon U_3(2) \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\cos(\pi z)}{(z+3)^2}$ ist holomorph mit

$$f'(z) = \frac{-\pi\sin(\pi z)(z+3)^2 - 2\cos(\pi z)(z+3)}{(z+3)^4}$$

für alle $z \in U_3(2)$. Ferner gilt $n(\gamma, 3) = 2$ und γ ist ein geschlossener Weg in $U_3(2)$. Die Cauchysche Integralformel für Ableitungen liefert somit (beachte $\sin(3\pi) = 0$ und $\cos(3\pi) = -1$)

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(9-z^2)^2}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-3)^{1+1}}\, dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1!} n(\gamma,3) f'(3) = 4\pi\mathrm{i}\underbrace{f'(3)}_{=\frac{2}{6^3}} = \frac{\pi}{27}\mathrm{i}.$$

□

Aufgabe 2:
Es seien $R > 0$ und $f\colon \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$, sowie

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,R}&\colon [0,R] \to \mathbb{C},\ \gamma_{1,R}(t) := t,\\
\gamma_{2,R}&\colon [0,\tfrac{\pi}{4}] \to \mathbb{C},\ \gamma_{2,R}(t) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\\
\gamma_{3,R}&\colon [0,R] \to \mathbb{C},\ \gamma_{3,R}(t) := t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Ferner sei $\gamma_R := \gamma_{1,R} \oplus \gamma_{2,R} \oplus \gamma_{3,R}^{-}$.

(i) Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ gilt, und berechnen Sie damit die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Behauptung: Es gilt $\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \to 0$ $(R \to \infty)$.

Beweis: Es gilt

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{1}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|\,dt = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}|}\,dt.$$

Weiter gilt für $R > 1$ (und $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$):

$$|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}| \geq \big||R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}| - 1\big| = R^2 - 1.$$

Somit erhält man für $R > 1$

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{R^2-1}\,dt = \frac{\pi}{4(R-\frac{1}{R})} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

$\square$

(ii) Behauptung: Es gilt $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$, sowie $\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ und $\int_0^\infty \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt = 0$.

Beweis: Definiere $S := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}\}$ und $D := \{z - (1+\frac{\mathrm{i}}{2})\colon z \in S\}$. Dann ist D konvex und es gilt $\pm\mathrm{i} \notin D$, d.h. $f\big|_D\colon D \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Außerdem verläuft γ_R ganz in D. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

Weiter gilt

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan(t)\Big]_0^R = \arctan(R) \to \frac{\pi}{2} \quad (R \to \infty).$$

Ferner erhält man (beachte $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{3,R}} f(z)\,dz &= \int_0^R \frac{1}{1+t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,dt = \int_0^R \frac{\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})}{1+t^2\cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}t^2\sin(\frac{\pi}{2})}\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R \frac{(1+t^2)+\mathrm{i}(1-t^2)}{1+t^4}\,dt.
\end{aligned}$$

Zusammen mit Teil (i) erhält man

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{(1+t^2)+\mathrm{i}(1-t^2)}{1+t^4}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_0^\infty \frac{(1+t^2)+\mathrm{i}(1-t^2)}{1+t^4}\,dt.$$

Vergleich von Real-, bzw. Imaginärteil liefert schließlich die Behauptung. $\square$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass es keine ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{3n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Sie können den Identitätssatz verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: Es gibt keine ganze Funktion f gibt mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{3n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Angenommen es existiert eine ganze Funktion mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3-\frac{1}{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktion $g\colon \mathbb{C}\setminus\{3\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{2}{3-z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{3\}$ und erfüllt ebenfalls $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{3n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. f und g stimmen also insbesondere auf $A := \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ überein. Da A den Häufungspunkt $0 \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$ besitzt, liefert der Identitätssatz $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$, d.h. f ist eine holomorphe Fortsetzung von g. Da g in $z = 3$ jedoch einen Pol besitzt erhalten wir einen Widerspruch. $\square$

Aufgabe 4:
Es seien $f \in H(\mathbb{C})$ und $M\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $M(r) := \max\{|f(z)|\colon z \in \mathbb{C},\ |z| = r\}$. Zeigen Sie, dass folgende Alternative gilt:

Entweder M ist konstant,

oder M ist streng monoton wachsend und $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = \infty$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Entweder M ist konstant, oder M ist streng monoton wachsend und $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = \infty$.

Beweis: Ist M konstant, so kann M nicht streng monoton wachsend sein, d.h. die zweite Alternative kann nicht eintreten.

Seien nun M nicht-konstant und $0 \le r_1 < r_2$. Dann kann f nicht konstant sein. Da $D := U_{r_2}(0)$ beschränkt ist und f auf $\overline{D}$ stetig ist, liefert das Maximumprinzip

$$|f(z)| < \max_{w\in\partial D} |f(w)| = M(r_2) \qquad \text{für alle } z \in D.$$

Wegen $\overline{B_{r_1}(0)} \subset D$ gilt (mit obiger Ungleichung) somit insbesondere

$$M(r_1) = \max\{|f(z)|\colon z \in \mathbb{C},\ |z| = r_1\} < \max_{w\in\partial D} |f(w)| = M(r_2),$$

d.h. M ist streng monoton wachsend. Wäre M beschränkt, so wäre auch f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und somit nach dem Satz von Liouville konstant, ein Widerspruch. Somit ist M unbeschränkt (und streng monoton wachsend), es gilt also $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = \infty$. $\square$

Aufgabe 5:
Es sei $\alpha > 0$. Ferner sei das folgende Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x' &= -y - \alpha x^3, \\ y' &= x - y^3. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Systems (1).

(ii) Zeigen Sie, dass $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(x,y) := \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ eine Lyapunov-Funktion zu (1) im Punkt $(0,0)$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die stationäre Lösung $(0,0)$ asymptotisch stabil ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) *Behauptung:* $(0,0)$ ist die einzige stationäre Lösung von (1).

Beweis: Definiere
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := (-y-\alpha x^3,\, x-y^3).$$
Die stationären Lösungen von (1) sind genau die Lösungen von $f(x,y) = 0$. Damit erhält man
$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(1+\alpha y^8) = 0 \text{ und } x = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0),$$
d.h. $(0,0)$ ist die einzige stationäre Lösung von (1). $\square$

(ii) *Behauptung:* $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(x,y) := \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ist eine Lyapunov-Funktion zu (1) im Punkt $(0,0)$.

Beweis: Zunächst ist V stetig differenzierbar mit $V'(x,y) = (x,\, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $V(0,0) = 0$ und $V(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ferner gilt
$$V'(x,y)\cdot f(x,y) = -xy - \alpha x^4 + xy - y^4 = -\alpha x^4 - y^4 \leq 0$$
für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. V ist eine Lyapunov-Funktion zu (1) im Punkt $(0,0)$. $\square$

(iii) *Behauptung:* Alle stationären Lösungen sind asymptotisch stabil.

Beweis: Es gilt sogar
$$V'(x,y)\cdot f(x,y) = -xy - \alpha x^4 + xy - y^4 = -\alpha x^4 - y^4 < 0$$
für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nach Satz 4.5 ist $(0,0)$ somit asymptotisch stabil. $\square$

Aufgabe 6:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ferner sei das folgende Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -\alpha y. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass im Fall $\alpha = 0$ für jedes $F \in C^1(\mathbb{R})$ durch
$$H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ H(x,y) := F(y)$$
ein erstes Integral von (2) definiert wird.

(ii) Bestimmen Sie im Fall $\alpha < 0$ ein nicht-konstantes erstes Integral von (2).
Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz mit $\lambda(x,y) = x^{1-2\alpha} y^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0$ jedes erste Integral von (2) konstant ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) <u>*Behauptung:*</u> $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) := F(y)$ ist im Fall $\alpha = 0$ ein erstes Integral von (2).

<u>*Beweis:*</u> Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (-x,\,-\alpha y) = (-x,\,0)$. H ist stetig differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$H'(x,y) \cdot f(x,y) = (0,\, F'(y)) \cdot (-x,\,0)^T = 0.$$

$\square$

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Im Fall $\alpha < 0$ ist $H(x,y) = \frac{\alpha}{2-2\alpha} x^{2-2\alpha} y^{2-\frac{2}{\alpha}}$ ein nicht-konstantes erstes Integral von (2).

<u>*Beweis:*</u> Mit dem Hinweis macht man den Ansatz

$$H'(x,y) = \lambda(x,y)\big(\alpha y,\, -x\big) = \big(\alpha x^{1-2\alpha} y^{2-\frac{2}{\alpha}},\, -x^{2-2\alpha} y^{1-\frac{2}{\alpha}}\big)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter gilt

$$\Big(\alpha x^{1-2\alpha} y^{2-\frac{2}{\alpha}}\Big)_y = (2\alpha - 2) x^{1-2\alpha} y^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} = \Big(-x^{2-2\alpha} y^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\Big)_x$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. es existiert eine Stammfunktion von H'. Integrieren der ersten Komponente von bezüglich x liefert

$$H(x,y) = \frac{\alpha}{2-2\alpha} x^{2-2\alpha} y^{2-\frac{2}{\alpha}} + \varphi(y)$$

mit einem $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Durch Differenzieren nach y erhält man

$$(H(x,y))_y = \frac{\alpha}{2-2\alpha}\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right) x^{2-2\alpha} y^{1-\frac{2}{\alpha}} + \varphi'(y) = -x^{2-2\alpha} y^{1-\frac{2}{\alpha}} + \varphi'(y).$$

Somit muss $\varphi'(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gelten, d.h. φ muss konstant sein. Wir können also $\varphi \equiv 0$ wählen und erhalten ein nicht-konstantes erstes Integral

$$H(x,y) = \frac{\alpha}{2-2\alpha} x^{2-2\alpha} y^{2-\frac{2}{\alpha}}.$$

$\square$

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Für $\alpha > 0$ ist jedes erste Integral von (2) konstant.

<u>*Beweis:*</u> Es seien $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein erstes Integral von (2) und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $(x(t),\, y(t)) = (x_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t})$ eine Lösung von (2). Es existiert also eine Konstante $c = c(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ mit

$$H(x(t),\, y(t)) = H(x_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}) = c \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt $\lim_{t\to\infty} H(x_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}) = c$. Da $\alpha > 0$ ist, gilt $\lim_{t\to\infty}(a_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}) = (0,0)$. Wegen der Stetigkeit von H erhält man schließlich

$$H(x_0, y_0) = H(x_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t})\Big|_{t=0} = c = \lim_{t\to\infty} H(x_0 \mathrm{e}^{-t},\, y_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}) = H(0,0),$$

d.h. (da $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war) H ist konstant. $\square$

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie sämtliche $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u = f \qquad \text{auf } [0,1],\\ &u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in C([0,1])$ genau eine Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Behauptung: Das Randwertproblem hat genau für $\alpha \neq 1$ eine eindeutige Lösung.

Beweis: Für $\alpha = 0$ lautet die homogene Differentialgleichung $u'' = 0$. Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch $u(x) = c_1 + c_2 x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Randbedingungen liefert $c_1 = c_2 = 0$, d.h. das homogenen Randwertproblem besitzt nur die triviale Lösung. Nach Satz 5.2 hat das gegebene Randwertproblem (für $\alpha = 0$) also eine eindeutige Lösung.

Sei nun $\alpha \neq 0$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 \mathrm{e}^{-\alpha x} + c_2 x \mathrm{e}^{-\alpha x} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Randbedingung bei $u(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$. Die zweite Randbedingung ergibt

$$0 = u'(1) = c_2(1 - \alpha x)\mathrm{e}^{-\alpha x}\Big|_{x=1} = c_2(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}.$$

Somit hat das homogene Randwertproblem genau für $\alpha \neq 1$ nur die triviale Lösung. Nach Satz 5.2 hat das gegebene inhomogene Randwertproblem also genau für $\alpha \neq 1$ eine eindeutige Lösung. □

Aufgabe 8:
Es seien $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, sowie $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung (mit $c = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned}$$

Ferner existiere ein $R > 0$ mit $u_1(x) = 0$ für alle $|x| > R$. Zeigen Sie, dass ein $t_0 > 0$ existiert, sodass

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t(x,t))^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_x(x,t))^2 \, dx$$

für alle $t > t_0$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:
Behauptung: Es existiert ein $t_0 > 0$, sodass $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t(x,t))^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_x(x,t))^2 \, dx$ für alle $t > t_0$ gilt.

Beweis: Die Lösung u ist nach der Vorlesung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) \, ds \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}(u_1(x+t) + u_1(x-t)) \quad \text{und} \quad u_x(x,t) = \frac{1}{2}(u_1(x+t) - u_1(x-t))$$

Dies liefert

$$(u_t(x,t))^2 - (u_x(x,t))^2 = u_1(x+t)u_1(x-t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Sei nun $t > t_0 := R$ und $x \in \mathbb{R}$. Ist $u_1(x+t) \neq 0$, so gilt nach Voraussetzung $x + t \in [-R, R]$. Somit gilt (wegen $t > t_0 = R$)

$$x - t = x + t - 2t \leq R - 2t < R - 2R = -R,$$

d.h. es gilt $u_1(x-t) = 0$. Insgesamt gilt also $u_1(x+t)u_1(x-t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > t_0$. Mit obiger Gleichheit erhält man

$$(u_t(x,t))^2 = (u_x(x,t))^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > t_0$ und somit

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t(x,t))^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_x(x,t))^2 \, dx$$

für alle $t > t_0$ gilt. □