Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis 4

18.02.2020

Aufgabe 1:

(i) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin(|z|^2)$ komplex differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^4 - 5z + 1$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $z = 0$ oder $|z| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. In diesem Fall gilt $f'(z) = 0$.

Beweis: Mit $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = \sin(x^2+y^2)$. Dann sind die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,y) := \sin(x^2+y^2), \qquad v(x,y) := 0 \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

stetig partiell differenzierbar. Damit ist $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Cauchy-Riemann-DGL genau dann erfüllt, wenn $x\cos(x^2+y^2) = 0$ und $y\cos(x^2+y^2) = 0$ gilt, also genau dann, wenn $x = y = 0$ oder $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. D.h. f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $z = 0$ oder $|z| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. In diesen Fällen gilt $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$. □

(ii) *Behauptung:* f hat genau eine Nullstelle in $\mathbb{D}$.

Beweis: Es seien $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $g\colon U_2(0) \to \mathbb{C}$, $g(z) := -5z$. Dann sind f und g holomorph auf $U_2(0)$ und γ verläuft in $U_2(0)$. Weiter gilt für $z \in |\gamma|$:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 + 1| \leq |z|^4 + 1 = 2 < 5 = |-5z| = |g(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen von f und g in $\mathbb{D}$ überein. Da g in $\mathbb{D}$ genau eine Nullstelle besitzt, besitzt f in $\mathbb{D}$ folglich auch genau eine Nullstelle. □

Aufgabe 2:

Es seien $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ und $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Weiter gelte

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Zeigen Sie, dass $|a_n| < (n+1)\mathrm{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: Es gilt $|a_n| < (n+1)\mathrm{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ gilt mit der Voraussetzung $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$|a_0| = |f(0)| \leq 1 < (0+1)\mathrm{e}.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $r := \frac{n}{n+1} \in (0,1)$. Weiter definiere $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Dann verläuft γ in $\mathbb{D}$ und es gilt $n(\gamma, 0) = 1$. Mit dem Cauchyschen Integralsatz für Ableitungen erhält man

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n(\gamma,0)2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw.$$

Somit gilt mit der Voraussetzung $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{L(\gamma)}_{=2\pi r} \max_{w \in |\gamma|} \left| \frac{f(w)}{w^{n+1}} \right| \leq r \frac{1}{1-r} \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{r^{-n}}{1-r}.$$

Mit der Wahl von r erhält man schließlich

$$|a_n| \leq \frac{r^{-n}}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\mathrm{e}.$$

□

Aufgabe 3:
Es seien $c > 0$ und $B := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Zeigen Sie, dass es keine nicht-konstante, ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(z+1) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad |f(z)| \geq c \quad \text{für alle } z \in B.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Behauptung: Es gibt keine nicht-konstante, ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|f(z)| \geq c$ für alle $z \in B$.

Beweis: Zunächst gilt $t - [t] \in [0,1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $[t] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq t\}$ die Gaußklammer bezeichne.

Angenommen eine Funktion mit obigen Eigenschaften würde existieren, so würde aus induktiver Anwendung der Voraussetzung $f(z+k) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ folgen. Damit würde für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ gelten

$$|f(z)| = |f(x+\mathrm{i}y)| = |f(\underbrace{x - [x] + \mathrm{i}y}_{\in B})| \geq c > 0,$$

d.h. $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit wäre $g := \frac{1}{f}$ eine ganze Funktion mit

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{|f(x+\mathrm{i}y)|} = \frac{1}{|f(x-[x]+\mathrm{i}y)|} \leq \frac{1}{c}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. g wäre beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville wäre g daher konstant und somit auch f. Ein Widerspruch zur Tatsache, dass f nicht-konstant ist. □

Aufgabe 4:
Es seien $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) := z^4 - 8z^2 + 4$ und $Z(q) := \{z \in \mathbb{C} \colon q(z) = 0\}$, sowie

$$f\colon \mathbb{C} \setminus Z(q) \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{z}{q(z)}.$$

(i) Bestimmen Sie die Menge A aller Pole von f, und berechnen Sie $\operatorname{Res}(f, a)$ für alle $a \in A$.

(ii) Es sei nun $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(i) *Behauptung:* Es gilt $A = \left\{\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}, \pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right\}$ und

$$\operatorname{Res}(f, \pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}) = \frac{1}{8\sqrt{3}}, \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Res}(f, \pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}) = -\frac{1}{8\sqrt{3}}.$$

Beweis: Es gilt $w^2 - 8w + 4 = 0$ genau dann, wenn $w = w_1 := 4 + 2\sqrt{3} > 0$ oder $w = w_2 := 4 - 2\sqrt{3} > 0$. Damit erhält man $Z(q) = \{z_{1,\pm}, z_{2,\pm}\}$ mit $z_{1,\pm} = \pm\sqrt{w_1}$, und $z_{2,\pm} = \pm\sqrt{w_2}$. Die Menge $Z(q)$ stimmt mit der Menge der Pole von f überein. Ferner sind alles Pole der Ordnung 1, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_{1,\pm}) &= \lim_{z\to z_{1,\pm}} (z - z_{1,\pm}) f(z) = \lim_{z\to z_{1,\pm}} \frac{z}{(z - z_{1,\mp})(z^2 - w_2)} = \lim_{z\to z_{1,\pm}} \frac{z}{(z + z_{1,\pm})(z^2 - w_2)} \\ &= \frac{z_{1,\pm}}{2z_{1,\pm}(w_1 - w_2)} = \frac{1}{8\sqrt{3}},\end{aligned}$$

bzw.

$$\operatorname{Res}(f, z_{2,\pm}) = \lim_{z\to z_{2,\pm}} (z - z_{2,\pm}) f(z) = \lim_{z\to z_{2,\pm}} \frac{z}{(z^2 - w_1)(z + z_{2,\pm})} = \frac{z_{2,\pm}}{(w_2 - w_1)2z_{2,\pm}} = -\frac{1}{8\sqrt{3}}.$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = -\frac{\pi \mathrm{i}}{2\sqrt{3}}$.

Beweis: Es gilt $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ (f ist also meromorph auf $\mathbb{C}$, d.h. $f \in M(\mathbb{C})$) und γ ist ein Zyklus in $\mathbb{C} \setminus A$, sowie nullhomolog in $\mathbb{C}$. Ferner gilt $|z_{1,\pm}| > 1$, d.h. $n(\gamma, z_{1,\pm}) = 0$ und $|z_{2,\pm}| < 1$, d.h. $n(\gamma, z_{2,\pm}) = 1$. Der Residuensatz liefert somit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f, a)\, n(\gamma, a) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

□

Aufgabe 5:
Gegeben seien ein Lipschitz-stetiges $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, sowie $x_0, \hat{x}_0 \in \mathbb{R}$ und die beiden Anfangswertprobleme

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$
$$\hat{x}' = f(\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \tag{2}$$

Ferner seien ein $T > 0$ und Lösungen $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ von (1) und $\hat{x}\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ von (2) gegeben. Zeigen Sie

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - \hat{x}(t)| \leq |x_0 - \hat{x}_0| \mathrm{e}^{LT}.$$

Hinweis: Lemma von Gronwall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: Es gilt $\sup_{x\in[0,T]} |x(t) - \hat{x}(t)| \leq |x_0 - \hat{x}_0| \mathrm{e}^{LT}$.

Beweis: Für die Lösungen gilt $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$, bzw. $\hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \int_0^t f(\hat{x}(s))\,ds$. Somit erhält man

$$x(t) - \hat{x}(t) = x_0 - \hat{x}_0 + \int_0^t [f(x(s)) - f(\hat{x}(s))]\,ds.$$

Mit der Dreiecksungleichung und der Lipschitz-Stetigkeit von f erhält man

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \le |x_0 - \hat{x}_0| + \int_0^t |f(x(s)) - f(\hat{x}(s))|\,ds \le |x_0 - \hat{x}_0| + L\int_0^t |x(s) - \hat{x}(s)|\,ds.$$

Das Lemma von Gronwall (mit $\alpha = |x_0 - \hat{x}_0|$, $\beta = L$, $\varphi(t) = |x(t) - \hat{x}(t)|$ $(t \in [0,T])$) liefert schließlich

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \le |x_0 - \hat{x}_0|\mathrm{e}^{Lt} \le |x_0 - \hat{x}_0|\mathrm{e}^{LT} \quad (t \in [0,T)).$$

Somit gilt für das Supremum:

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - \hat{x}(t)| \le |x_0 - \hat{x}_0|\mathrm{e}^{LT}.$$

□

Aufgabe 6:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ferner sei das folgende Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\cos(y) - 2xy) - \frac{1}{y}, \\ y' &= \frac{1}{x} + \alpha y^2. \end{aligned} \qquad (x, y > 0) \tag{3}$$

(i) Zeigen Sie, dass $H\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) := \log(xy)$ im Fall $\alpha = 0$ ein erstes Integral von (3) ist.

(ii) Bestimmen Sie für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ein nicht-konstantes erstes Integral von (3).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* H ist ein erstes Integral von (3) im Fall $\alpha = 0$.

Beweis: In Fall $\alpha = 0$ ist die rechte Seite gegeben durch $f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (-\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$. Weiter ist H stetig differenzierbar mit $H'(x,y) = (\frac{1}{xy}y, \frac{1}{xy}x) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ $((x,y) \in (0,\infty)^2)$. Somit erhält man für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$:

$$H'(x,y) \cdot f(x,y) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

□

(ii) *Behauptung:* $H(x,y) = \alpha(\sin(y) - xy^2) - \log(xy)$ $((x,y) \in (0,\infty)^2$ ist ein nicht-konstantes erstes Integral von (3).

Beweis: Zunächst seien $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \alpha(\cos(y) - 2xy) - \frac{1}{y}$ und $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x,y) := \frac{1}{x} + \alpha y^2$, sowie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (g(x,y), h(x,y))$. Mit dem Ansatz aus der Vorlesung $H'(x,y) = \lambda(x,y)(-h(x,y), g(x,y))$ $((x,y) \in (0,\infty)^2)$ prüft man die Integrabilitätsbedinung $(-\lambda h)_y \overset{!}{=} (\lambda g)_x$ nach und erhält:

$$-\lambda_y\left(\frac{1}{x} + \alpha y^2\right) - \lambda\,(2\alpha y) \overset{!}{=} \lambda_x\left(\alpha(\cos(y) - 2xy) - \frac{1}{y}\right) + \lambda\,(-2\alpha y)\,.$$

Wählt man $\lambda \equiv 1$, so ist die Integrabilitätsbedinung erfüllt, d.h. es existiert eine Stammfunktion von H' und somit ein erstes Integral von (3).

Integrieren der zweiten Komponente bezüglich y liefert

$$H(x,y) = \alpha(\sin(y) - xy^2) - \log(y) + \varphi(x)$$

mit einem $\varphi \in C^1((0,\infty))$. Durch Differenzieren nach x erhält man

$$(H(x,y))_x = -\alpha y^2 + \varphi'(x) \overset{!}{=} -\frac{1}{x} - \alpha y^2,$$

d.h. $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$. Somit kann $\varphi(x) = -\log(x)$ gewählt werden und man erhält das nicht-konstante erste Integral

$$H(x,y) = \alpha(\sin(y) - xy^2) - \log(xy) \quad ((x,y) \in (0,\infty)^2.$$

$\square$

Aufgabe 7:
Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (xu')' - \frac{1}{x}u &= f \qquad \text{auf } [1,2], \\ u(1) + u'(1) &= 0, \;\; u(2) = 0, \end{aligned}$$

für jedes $f \in C([1,2])$ genau eine Lösung besitzt. Bestimmen Sie außerdem die zugehörige Greensche Funktion.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, um ein Fundamentalsystem des homogenen Problems zu bestimmen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
<u>*Behauptung:*</u> Das Randwertproblem besitzt für jedes $f \in C([1,2])$ genau eine Lösung. Die zugehörige Greensche Funktion lautet

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right), & 1 \le x \le t \le 2, \\ \frac{1}{t}\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right), & 1 \le t \le x \le 2. \end{cases}$$

<u>*Beweis:*</u> Einsetzen des Ansatzes $u(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ in die homogene Differentialgleichung liefert

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + \alpha x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} = 0$$

und somit $\alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1) = 0$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet somit $u(x) = Ax + B\frac{1}{x}$. Anwenden der Randbedingungen $R_1[u] := u(1) + u'(1) = 0$, bzw. $R_2[u] := u(2) = 0$ ergibt $2A = 0$ und $2A + \frac{1}{2}B = 0$ und somit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=:M} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(M) = 1 \neq 0$ ist dieses lineare Gleichungssystem nur trivial lösbar, d.h. das homogene Randwertproblem besitzt nur die triviale Lösung. Nach der Vorlesung ist das inhomogene Randwertproblem also für jedes $f \in C([1,2])$ eindeutig lösbar.

Um die Greensche Funktion zu bestimmen, berechnet man zunächst ein Fundamentalsystem ϕ, ψ mit $R_1[\phi] = R_2[\psi] = 0$ und $R_2[\phi] = R_1[\psi] = 1$. Mit dem Ansatz $\phi(x) = a_1 x + a_2 \frac{1}{x}$ erhält man das Gleichungssystem $M \cdot a = e_2$, mit $a = (a_1, a_2)$ und $e_2 = (0,1)$. Dies liefert $a_1 = 0$ und $a_2 = 2$, also $\phi(x) = \frac{2}{x}$. Analog erhält man $\psi(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$. Schließlich muss noch die zugehörige Wronski-Determinante bestimmt werden:

$$W[\phi,\psi](x) = \det\begin{pmatrix} \phi(x) & \psi(x) \\ \phi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix} = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right) + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x}.$$

Nach der Vorlesung lautet die Greensche Funktion also

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right), & 1 \le x \le t \le 2, \\ \frac{1}{t}\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right), & 1 \le t \le x \le 2. \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 8:
Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -ye^y, \\ y' &= 8x - 6y, \\ z' &= \cos(x) + 2y^2 - z - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

(i) Bestimmens Sie alle stationären Lösungen des Systems (4).

(ii) Untersuchen Sie die stationäre Lösung $(0,0,0)$ auf Stabilität und asymptotische Stabilität.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

(i) *Behauptung:* $(0,0,0)$ ist die einzige stationäre Lösung.

Beweis: Definiere

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) := (-ye^y,\, 8x - 6y,\, \cos(x) + 2y^2 - z - 1).$$

Die stationären Lösungen sind gerade die Lösungen von $f(x,y,z) = 0$. Damit erhält man

$$f(x,y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -ye^y = 0 \ \wedge\ 8x - 6y = 0 \ \wedge\ cos(x) + 2y^2 - z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0),$$

d.h. $(0,0,0)$ ist die einzige stationäre Lösung. □

(ii) *Behauptung:* $(0,0,0)$ ist asymptotisch stabil.

Beweis: f aus Teil (i) ist stetig differenzierbar mit

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -(1+y)e^y & 0 \\ 8 & -6 & 0 \\ -\sin(x) & 4y & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0, & -1 & 0 \\ 8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda, & -1 & 0 \\ 8 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda, & -1 \\ 8 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(2+\lambda)(4+\lambda).$$

Daher haben alle Eigenwerte von $f'(0,0,0)$ einen negativen Realteil. Nach dem Stabilitätssatz aus der Vorlesung ist $(0,0,0)$ also asymptotisch stabil. Insbesondere ist $(0,0,0)$ stabil. □