Karlsruher Institut für Technologie

Analysis IV

Funktionentheorie und Differentialgleichungen

Gelesen von

Dr. Christoph Schmoeger

im Sommersemester 2018.

Version vom 14. August 2018

In LaTeX verfasst von Wolf Wechinger.*

*Für Anregungen oder Kritik an uijfw@student.kit.edu wird herzlich gedankt.

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Funktionentheorie

Literaturhinweise:

- L. Ahlfors: Complex Analysis
- E. Freitag, R. Busam: Funktionentheorie
- K. Fritzsche: Grundkurs Funktionentheorie
- W. Rudin: Real and Complex Analysis
- J. B. Conway: Functions of one complex Variable

Grundlagen

Die folgenden Begriffe der Analysis I-III werden als bekannt vorausgesetzt:

- Konvergenz von Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$.
- Für $A \subseteq \mathbb{C}$: offen, abgeschlossen, kompakt, $A^\circ, \overline{A}, \partial A$, Häufungspunkt (HP) von A.
- Für $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}, z_0 \in D, f : D \to \mathbb{C} : \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, Stetigkeit.
- Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$, so heißt f differenzierbar (db) auf $I \Leftrightarrow$ $\mathfrak{Re}\, f, \mathfrak{Im}\, f$ sind db auf I. In diesem Fall: $f' = (\mathfrak{Re}\, f)' + i(\mathfrak{Im}\, f)'$.
- Ist $I = [a,b]$, so heißt f integrierbar (ib) über $I \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\, f, \mathfrak{Im}\, f$ sind ib über I.
  In diesem Fall:
  $$\int_a^b f \,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathfrak{Re}\, f \,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathfrak{Im}\, f \,\mathrm{d}t.$$

Wir vereinbaren für die gesamte Vorlesung:

- Für $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0 : U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}, \overline{U_\delta(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \delta\}$, $\dot{U}_\delta(z_0) := U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}, \mathbb{D} := U_1(0), U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$.
- Für $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ sei stets $u := \mathfrak{Re}\, f, v := \mathfrak{Im}\, f$, also $f = u + iv$ mit $u,v : D \to \mathbb{R}$ oder in reeller Auffassung $f = (u,v)$.
- Zu $0 \neq z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x,y \in \mathbb{R})$ existiert ein $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass $x = |z| \cos \varphi, y = |z| \sin \varphi$, also $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. (**Polardarstellung**).
  φ heißt ein **Argument** von z. Zu jedem weiteren Argument ψ von z existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi = \psi + 2k\pi$, also existiert genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$, sodass $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Dieses φ heißt der **Hauptwert** des Arguments von $z, \varphi = \operatorname{Arg} z$.

§ 1 Komplexe Differenzierbarkeit

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$.

Definition. Sei $z_0 \in D$.

(1) f heißt in z_0 **komplex differenzierbar** (komplex db) :⇔ Der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert in $\mathbb{C}$. In diesem Fall heißt $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ die **Ableitung** von f in z_0.

(2) f heißt auf D **holomorph** :⇔ f ist in jedem $z \in D$ komplex db. In diesem Fall heißt $f' : z \mapsto f'(z)$ die **Ableitung** von f auf D.

(3) $H(D) := \{g : D \to \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$.

1.1 Satz. Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$. Dann gilt: f ist in z_0 komplex db ⇔ u, v sind in (x_0, y_0) reell db und es gelten die Cauchy-Riemannschen DGL. (CRD):

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

In diesem Fall ist $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$.

BEWEIS Sei $0 \neq h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ $(h_1, h_2 \in \mathbb{R})$ so, dass $z_0 + h \in D$, und sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Setze

$$Q(h) := \frac{1}{|h|}\left(f(z_0 + h) - f(z_0) - ch\right)$$

und $P(h) := \mathfrak{Re}\, Q(h), R(h) := \mathfrak{Im}\, Q(h)$. Nachrechnen:

$$\begin{aligned} P(h) &= \frac{1}{|h|}\left(u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - (h_1 a - h_2 b)\right), \\ R(h) &= \frac{1}{|h|}\left(v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - (h_1 b + h_2 a)\right). \end{aligned}$$

Damit: f ist in z_0 komplex db mit $f'(z_0) = c \Leftrightarrow Q(h) \to 0$ $(h \to 0) \Leftrightarrow P(h) \to 0$, $R(h) \to 0$ $(h \to 0) \Leftrightarrow u, v$ sind in (x_0, y_0) reell db mit

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= a = v_y(x_0, y_0) \text{ und} \\ -u_y(x_0, y_0) &= b = v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

In diesem Fall: $f'(z_0) = c = a + ib = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. q.e.d.

Beispiel. (1) $D = \mathbb{C}, f(z) = \overline{z} = x - iy$ für $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann ist $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$ und daher $u_x = 1 \neq -1 = v_y$, d.h. f ist in keinem $z \in \mathbb{C}$ komplex db. In der reellen Auffassung ist $f(x,y) = (x, -y)$ in jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ reell db.

(2) Gibt es ein $f \in H(\mathbb{C})$ mit $u = x^2$? Dann wäre $u_x = 2x = v_y \Rightarrow v = 2xy + c(x) \Rightarrow v_x = 2y + c'(x) = u_y = 0 \Rightarrow c'(x) = -2y$ ↯ Widerspruch!

1.2 Satz. Seien $g : D \to \mathbb{C}, f$ und g komplex db in $z_0 \in D, \emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f(D) \subseteq E, h : E \to \mathbb{C}$ komplex db in $f(z_0)$ und $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, \gamma : [a,b] \to D$ db. Dann gilt:

(1) f ist stetig in z_0.

(2) $f \pm g$ und fg sind komplex db in z_0 mit

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0) \text{ und } \qquad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(3) Ist $g(z_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0$ $(z \in U_\delta(z_0))$ und $\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ ist komplex db in z_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

(4) $h \circ f : D \to \mathbb{C}$ ist komplex db in z_0 mit

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

(5) Ist $f \in H(D)$, so ist $\varphi(t) := f(\gamma(t))$ $(t \in [a,b])$ db auf $[a,b]$ mit

$$\varphi'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \ (t \in [a,b]).$$

BEWEIS Übung. q.e.d.

Beispiel. Seien $n \in \mathbb{N}; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n$ $(z \in \mathbb{C})$.
Dann ist $p \in H(\mathbb{C})$ und $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$ $(z \in \mathbb{C})$.

§ 2 Potenzreihen

Definition. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt eine **Potenzreihe** (PR) in $\mathbb{C}$. Setze

$$\varrho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ (\varrho = \infty, \text{ falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt ist}),$$

$$R := \frac{1}{\varrho} = \begin{cases} 0, & \varrho = \infty, \\ \infty, & \varrho = 0, \\ \frac{1}{\varrho}, & 0 < \varrho < \infty. \end{cases}$$

R heißt der **Konvergenzradius** (KR) der PR.

2.1 Satz. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine PR mit KR R. Es gilt:

(1) Ist $R = 0$, so konvergiert die PR nur in $z = z_0$.

(2) Ist $R = \infty$, so konvergiert die PR in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.

(3) Sei $0 < R < \infty$. Dann konvergiert die PR in jedem $z \in U_R(z_0)$ absolut. Weiter divergiert die PR in jedem z mit $|z - z_0| > R$. Für $|z - z_0| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

(4) Sei $K \subseteq U_R(z_0)$ kompakt. Dann konvergiert die PR auf K gleichmäßig.

(5) Definiere $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann ist f stetig.

BEWEIS Wie in Analysis I. q.e.d.

2.2 Satz. Es sei die Situation wie in Satz 2.1. Dann gilt:

(1) $f \in H(U_R(z_0))$ mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ $(z \in U_R(z_0))$.

(2) f ist auf $U_R(z_0)$ beliebig oft komplex db, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

BEWEIS Wie in Analysis I. q.e.d.

Beispiel. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es ist $R = 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert $\Leftrightarrow |z| < 1$. In diesem Fall: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (**geometrische Reihe**).

(2) Wie in Analysis I definiere

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ (}\textbf{Exponentialfunktion}\text{)},$$
$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ (}\textbf{Sinus}\text{)},$$
$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ (}\textbf{Cosinus}\text{)}.$$

Es gilt: $\exp, \sin, \cos \in H(\mathbb{C}), \exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin$ auf $\mathbb{C}$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Die PR divergiert für $|z| = 1$. Für $|z| < 1 : |z^{n!}| = |z|^{n!} \leqslant |z|^n = |z^n|$. Daher konvergiert die PR nach dem Majorantenkriterium für $|z| < 1 \Rightarrow R = 1$.

§ 3 Stammfunktionen und Gebiete

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition. (1) Sei $F \in H(D)$ und $F' = f$ auf D. Dann heißt F eine **Stammfunktion** (SF) von f auf D.

(2) D heißt **zusammenhängend** (zhg) $:\Leftrightarrow \forall A, B \subseteq D$ offen mit $A \cap B = \emptyset, A \cup B = D$ gilt: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

(3) D heißt ein **Gebiet** $:\Leftrightarrow D$ ist offen und zhg.

3.1 Satz. D ist zhg $\Leftrightarrow$ D ist wegzusammenhängend (wegzhg), d.h. zu allen $z_1, z_2 \in D$ existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to D$, sodass $\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$.

Ohne BEWEIS.

3.2 Satz. Sei D ein Gebiet, $f \in H(D)$ und $f' = 0$ auf D. Dann ist f auf D konstant.

BEWEIS Seien $z_0 \in D, c := f(z_0), A := \{z \in D : f(z) \neq c\}$ und $B := \{z \in D : f(z) = c\}$.
Dann gilt: $A \cup B = D, A \cap B = \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ wegen $z_0 \in B$.
$A = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{c\}), \mathbb{C} \setminus \{c\}$ ist offen, f ist stetig auf $D \Rightarrow A$ ist offen.
Sei $z_1 \in B$. D offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(z_1) \subseteq D$. Sei $w \in U_\varepsilon(z_1)$ und $\gamma(t) := z_1 + t(w - z_1)$ $(t \in [0,1])$, so ist $\gamma([0,1]) \subseteq U_\varepsilon(z_1) \subseteq D$. $h := f \circ \gamma$ ist db auf $[0,1]$ mit $h'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ $(t \in [0,1]) \Rightarrow h(t) = h(0) = f(\gamma(0)) = f(z_1) = c$ $(t \in [0,1])$ wegen $z_1 \in B$. Wir erhalten $f(w) = h(1) = c$, also $w \in B$. Da $w \in U_\varepsilon(z_1)$ beliebig gewählt war, folgt $U_\varepsilon(z_1) \subseteq B$, und da $z_1 \in B$ beliebig gewählt war, ist B offen.
D zhg $\Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow B = D$. q.e.d.

Beispiel. (1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^n$. Dann hat f auf $\mathbb{C}$ die SF $z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

(2) exp hat die SF exp, cos die SF sin und sin die SF $-\cos$ auf $\mathbb{C}$.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = \frac{1}{z^n}$ $(z \in D)$. Dann hat f auf D die SF $z \mapsto \frac{1}{1-n} z^{1-n}$.

(4) Später: $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>keine</u> SF.

3.3 Folgerung. Sei D ein Gebiet und F_1, F_2 SF von f auf D.
Dann existiert ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $F_1 = F_2 + c$ auf D.

BEWEIS $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. Aus Satz 3.2 folgt: $F_1 - F_2$ ist konstant auf D. q.e.d.

3.4 Satz. Es sei die Situation wie in Satz 2.1. Dann ist $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ $(z \in U_R(z_0))$ eine SF von f auf $U_R(z_0)$.

BEWEIS Satz 2.2. q.e.d.

§ 4 Exponentialfunktion, Logarithmen und Wurzeln

Definition. Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(1) Jede Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = w$ heißt eine n**-te Wurzel** aus w.

(2) Jede Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(z) = w$ heißt ein **Logarithmus** von w.

4.1 Satz. Seien $a, b, z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.
Insbesondere ist $\exp(a) \cdot \exp(-a) = \exp(0) = 1$, also $\exp(a) \neq 0$.

(2) $\exp(x) = e^x, \exp(iy) = \cos y + i \sin y$, insbesondere $|\exp(iy)| = 1$. Damit gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C} : \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ und man definiert $e^z := \exp(z)$.

(3) $z = |z| e^{i\mathrm{Arg} z}$ (Polardarstellung).

(4) $e^z = e^{z+2k\pi i}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, insbesondere ist exp auf $\mathbb{C}$ nicht injektiv.

(5) $\cos z + i \sin z = e^{iz}, \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ und $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(6) $\cos z = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = (k + \frac{1}{2})\pi$ sowie $\sin z = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi$.

(7) z ist ein Logarithmus von $w \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log |w| + i\mathrm{Arg} w + 2k\pi i$.

(8) $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$.

(9) Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ definiere $z_k := \sqrt[n]{|w|} \exp(\frac{i}{n}(\mathrm{Arg} w + 2k\pi))$. Dann gilt:
$z_k \neq z_j$ $(k \neq j)$ sowie z ist eine n-te Wurzel aus $w \Leftrightarrow z \in \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$.

BEWEIS (1) Sei $w \in \mathbb{C}$ und $f(z) := \exp(z+w)\exp(-z)$. Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f'(z) = \exp(z+w)\exp(-z) - \exp(z+w)\exp(-z) = 0$ $(z \in \mathbb{C})$. Aus Satz 3.2 folgt: $f(z) = f(0) = \exp(w)$ $(z \in \mathbb{C})$, d.h. $\exp(z+w)\exp(z) = \exp(w)$ $(z, w \in \mathbb{C})$. Mit $w = a + b$ und $z = -b$ folgt die Beh.
(2) Nachrechnen. (3) folgt aus (2).

(4) $e^{2k\pi i} \overset{(2)}{=} \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + 0 = 1$. Aus (1) folgt die Beh.
(5) Nachrechnen. (6), (7) und (9) in den Übungen. (8) folgt aus (7). q.e.d.

Definition. Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiere den **Hauptwert des Logarithmus'** als $\mathrm{Log} w := \log|w| + i\mathrm{Arg} w$. $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$ heißt die **geschlitzte Ebene**.

Beispiel. Sei $x_0 \in (-\infty, 0)$ und $f(w) := \mathrm{Log} w$ $(w \neq 0)$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $w_n := x_0 + \frac{i}{n}$ und $v_n := x_0 - \frac{i}{n}$, so gilt $w_n \to x_0, v_n \to x_0$ und $\mathrm{Arg} w_n \to \pi, \mathrm{Arg} v_n \to -\pi$ für $n \to \infty$. Es folgt $f(w_n) = \log|w_n| + i\mathrm{Arg} w_n = \log\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{n^2}} + i\mathrm{Arg} w_n \to \log|x_0| + i\pi$ und analog $f(v_n) \to \log|x_0| - i\pi$ für $n \to \infty$. Daher ist f unstetig in x_0.

4.2 Satz. Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Im}\, z| < \pi\}$ (D ist ein Gebiet) und $f : D \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$.

(1) f ist auf D injektiv.

(2) $f(D) = \mathbb{C}_-$.

(3) Ist $f^{-1} : \mathbb{C}_- \to D$ die Umkehrfunktion von f, so gilt $f^{-1}(w) = \mathrm{Log} w$ $(w \in \mathbb{C}_-)$.

(4) $\mathrm{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$ mit $\mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{w}$ $(w \in \mathbb{C}_-)$.

BEWEIS (1) Seien $z_1, z_2 \in D$, sodass $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow 1 = e^{z_1 - z_2}$. Aus Satz 4.1(8) folgt: $\exists k \in \mathbb{Z} : z_1 - z_2 = 2k\pi i \Rightarrow 2k\pi = \mathfrak{Im}\,(z_1 - z_2) = \mathfrak{Im}\, z_1 - \mathfrak{Im}\, z_2 \Rightarrow 2\pi|k| = |\mathfrak{Im}\, z_1 - \mathfrak{Im}\, z_2| \leqslant |\mathfrak{Im}\, z_1| + |\mathfrak{Im}\, z_2| < \pi + \pi = 2\pi \Rightarrow k = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow$ Beh.
(2),(3) Sei $w \in \mathbb{C}_- \Rightarrow \mathrm{Arg} w \in (-\pi,\pi)$. Setze $z := \log|w| + i\mathrm{Arg} w$, so gilt $\mathfrak{Im}\, z \in (-\pi,\pi) \Rightarrow z \in D$. Satz 4.1(7) ergibt $e^z = w$, d.h. $f(z) = w \Rightarrow w \in f(D)$ und $f(\mathrm{Log} w) = f(z) = w$. Damit ist $\mathbb{C}_- \subseteq f(D)$, analog zeigt man auch $f(D) \subseteq \mathbb{C}_-$ und $\mathrm{Log}(f(z)) = z$ $(z \in D)$.
(4) Später in § 8. q.e.d.

§ 5 Wegintegrale

In diesem Paragraphen seien stets $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $I = [a,b]$.

Definition. Eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{C}$ heißt ein **Weg** in $\mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$ γ ist stetig. $|\gamma| := \gamma(I)$ heißt der **Träger** von γ und ist kompakt. $\gamma(a)$ heißt der **Anfangspunkt** (AP) und $\gamma(b)$ der **Endpunkt** (EP) von γ, I das **Parameterintervall**. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ **geschlossen**. Für $D \subseteq \mathbb{C}$ und $|\gamma| \subseteq D$ heißt γ ein **Weg in** D.
γ heißt **stückweise stetig db** (ssd) $:\Leftrightarrow \exists t_0, \ldots, t_n \in I : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1},t_k], \mathbb{C})$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$. Die **Rektifizierbarkeit** (rb) von Wegen definiert man wie in der Analysis II; ist γ ssd, so ist γ rb.
$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$ heißt der zu γ **inverse Weg**.

Definition. Seien $\gamma : I \to \mathbb{C}, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ssd Wege und $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig.

(1) $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$ heißt die **Länge** von γ.

(2) $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$ heißt das **Wegintegral** über f längs γ.

(3) γ und γ_1 heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow |\gamma| = |\gamma_1|$ und für jede stetige Funktion $g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ gilt: $\int_\gamma g \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} g \,\mathrm{d}z$. In diesem Fall gilt auch $L(\gamma) = L(\gamma_1)$.

5.1 Satz. Für $j = 1,2$ seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ ssd Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.
Dann existiert ein ssd Weg γ, sodass $|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|, L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ und für jede stetige Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ gilt: $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}z$.
In dieser Situation schreibe $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$.

BEWEIS Wie in Analysis II. q.e.d.

5.2 Satz. Seien $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein ssd Weg, $f, g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

(2) $\int_{\gamma^-} f \,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f \,\mathrm{d}z$.

(3) $\int_\gamma (\lambda f + \mu g) \,\mathrm{d}z = \lambda \int_\gamma f \,\mathrm{d}z + \mu \int_\gamma g \,\mathrm{d}z$.

(4) Für $M := \max\limits_{z \in |\gamma|} |f(z)|$ gilt: $\left| \int_\gamma f \,\mathrm{d}z \right| \leqslant M \cdot L(\gamma)$.

(5) Sind $f_n : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig ($n \in \mathbb{N}$) und konvergiert (f_n) auf $|\gamma|$ gleichmäßig gegen f, so gilt: $\int_\gamma f_n \,\mathrm{d}z \to \int_\gamma f \,\mathrm{d}z$ ($n \to \infty$).

BEWEIS (1),(2) Nachrechnen. (3) Klar.
(4) $|\int_\gamma f \,\mathrm{d}z| = |\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant M \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = M \cdot L(\gamma)$.
(5) folgt aus (4), betrachte $f_n - f$. q.e.d.

Beispiel. (1) Seien $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Dann ist γ geschlossen, $\gamma'(t) = ire^{it} \Rightarrow |\gamma'(t)| = r$ ($t \in [0, 2\pi]$) und daher $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}t = 2\pi r$. Für eine stetige Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ gilt: $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \cdot ire^{it} \,\mathrm{d}t$.

(2) Seien $u, v \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) := u + t(v - u)$ ($t \in [0,1]$). Dann ist $\gamma'(t) = v - u \Rightarrow |\gamma'(t)| = |v - u| \Rightarrow L(\gamma) = \int_0^1 |v - u| \,\mathrm{d}t = |v - u|$. In dieser Situation schreibe $[u, v] := \gamma([0,1]) = |\gamma|$ und

$$\int\limits_{[u,v]} f \,\mathrm{d}z := \int\limits_{\gamma} f \,\mathrm{d}z = (v - u) \int_0^1 f(u + t(u - v)) \,\mathrm{d}t.$$

(3) Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ und $\Delta := \Delta(u, v, w) \subseteq \mathbb{C}$ das Dreieck mit den Eckpunkten u, v, w, evtl. entartet. Für eine stetige Funktion $f : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ schreibe in dieser Situation

$$\int\limits_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z := \int\limits_{[u,v]} f \,\mathrm{d}z + \int\limits_{[v,w]} f \,\mathrm{d}z + \int\limits_{[w,u]} f \,\mathrm{d}z.$$

5.3 Satz. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein ssd Weg, $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, $D := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ (D ist offen), $z_0 \in D$ und $g : D \to \mathbb{C}, g(z) := \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$. Definiere

$$r := \mathrm{dist}(z_0, |\gamma|) = \inf\{|z_0 - w| : w \in |\gamma|\} \text{ und}$$
$$a_n := \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \ (n \in \mathbb{N}_0),$$

so ist $U_r(z_0) \subseteq D$ und es gilt

(1) $g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ ($z \in U_r(z_0)$),

(2) $g \in H(D)$.

BEWEIS (1) O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Für $t \in I : |\gamma(t)| = |\gamma(t) - z_0| \geqslant r$. Sei $z \in U_r(z_0)$. Wegen $\frac{|z|}{|\gamma(t)|} \leqslant \frac{|z|}{r} < 1$ ergeben das Kriterium von Weierstraß und die geometrische Reihe:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^{n+1}}$ konvergiert auf $|\gamma|$ gleichmäßig und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^{n+1}} = \frac{1}{\gamma(t)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma(t)}} = \frac{1}{\gamma(t) - z} \ (t \in I).$$

Mit der gleichmäßigen Konvergenz folgt weiter

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) mit 2.2, da z_0 beliebig war. q.e.d.

Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z \in D$. $D_z := \{w \in D :$ es ex. ein Weg in D mit AP z und EP $w\}$ heißt eine **Zusammenhangskomponente** (ZK) von D. Es gilt: $z \in D_z, D_z$ ist offen und D_z ist wegzhg, also zhg (Satz 3.1) und damit ein Gebiet, nämlich das größte in D gelegene Gebiet, das z enthält. Weitere Eigenschaften:

(1) $D = \bigcup_{z \in D} D_z$,

(2) Für $z_1, z_2 \in D : D_{z_1} = D_{z_2}$ oder $D_{z_1} \cap D_{z_2} = \emptyset$,

(3) D hat höchstens abzählbar viele ZK.

Definition. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein ssd geschlossener Weg und $D := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. $|\gamma|$ ist kompakt, also beschränkt; wegen obiger Eigenschaft (2) hat D daher genau eine unbeschränkte ZK. Für $z \in D$ heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

die **Umlaufzahl** von γ bzgl. z.

5.4 Satz. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein ssd geschlossener Weg, $D := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ und K eine ZK von D.

(1) $\forall z \in D : n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(2) $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf K konstant.

(3) K unbeschränkt $\Rightarrow n(\gamma, z) = 0 \ (z \in K)$.

BEWEIS (1) Sei $z \in D$, o.B.d.A. sei $z = 0$ und γ stetig db. Für $t \in I$ def.

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \, \mathrm{d}s \right),$$

so ist φ wegen $0 = z \notin |\gamma|$ wohldefiniert und es gilt $\varphi' = \varphi \cdot \frac{\gamma'}{\gamma} \Rightarrow \varphi'\gamma - \varphi\gamma' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\varphi}{\gamma}\right)' = 0$ auf I. Damit ist $\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)} = \frac{1}{\gamma(a)}$ auf I und da γ geschlossen ist, folgt

$$1 = \frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} = \varphi(b) = \exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,\mathrm{d}s\right).$$

Satz 4.1(8) ergibt: $\exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi i n(\gamma, z) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,\mathrm{d}s = 2k\pi i$, also $n(\gamma, z) = k \in \mathbb{Z}$.
(2) Mit $f \equiv 1$ folgt aus 5.3: $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf K holomorph, also stetig. (1) $\Rightarrow$ Beh.
(3) Für $z \in K$:

$$|n(\gamma, z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\underbrace{|\gamma(t) - z|}_{\to\infty}}\,\mathrm{d}t \to 0 \ (|z| \to \infty).$$

Mit (2) folgt die Beh. q.e.d.

Beispiel. Sei die Situation wie in (1) des vorherigen Beispiels.

$$D = \mathbb{C} \setminus |\gamma| = \underbrace{U_r(z_0)}_{=: K_1} \cup \underbrace{\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}}_{=: K_2},$$

so sind K_1, K_2 die ZK von D. Für $z \in K_2 : n(\gamma, z) = 0$ nach Satz 5.4(3). Für $z \in K_1 : n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = 1$ nach 5.4(2).

§ 6 Der lokale Cauchysche Integralsatz

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

6.1 Satz. Sei $I = [a, b], \gamma : I \to \mathbb{C}$ ein ssd Weg, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $F : D \to \mathbb{C}$ eine SF von f auf D. Dann gilt:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere: Ist γ geschlossen, so ist $\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 0$.

BEWEIS O.B.d.A. sei γ stetig db. Für $t \in I$ def. $\varphi(t) := F(\gamma(t))$, so ist $\varphi'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Mit $\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \int_a^b \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a)$ folgt die Beh. q.e.d.

Beispiel. (1) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = z^n$ $(z \in D)$. Für jeden ssd geschlossenen Weg in D gilt: $\int_\gamma z^n \, \mathrm{d}z = 0$, denn $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ist eine SF von f auf D.

(2) Sei $\gamma(t) := e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$. Dann ist γ geschlossen und $\int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i n(\gamma, 0) = 2\pi i \neq 0$. Aus Satz 6.1 folgt: $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>keine</u> SF.

6.2 Satz (Lemma von Goursat)**.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $p \in D, f \in H(D \setminus \{p\})$ und $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

BEWEIS Seien $J := \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z, M := \max_{z \in \Delta} |f(z)|$ und $\Delta = \Delta(u, v, w)$. Ist Δ entartet, d.h. u,v,w liegen auf einer Geraden, so ist $J = 0$ nach Satz 5.2(2).
<u>Fall 1:</u> $p \notin \Delta$. Halbiere die Seiten von Δ und erhalte die 4 Dreiecke $\Delta^1, \ldots, \Delta^4$. Wegen Satz 5.2(2) ist $J = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta^j} f \, \mathrm{d}z$, daher existiert ein $j_0 \in \{1, \ldots, 4\}$, sodass $\frac{|J|}{4} \leqslant |\int_{\partial\Delta^{j_0}} f \, \mathrm{d}z|$. Setze $\Delta_0 := \Delta, \Delta_1 := \Delta^{j_0}$, so ist $\Delta_1 \subseteq \Delta_0$ und $|J| \leqslant 4|\int_{\partial\Delta_1} f \, \mathrm{d}z|$.
Halbiere die Seiten von Δ_1 und erhalte $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$ mit $|J| \leqslant 4|\int_{\partial\Delta_1} f \, \mathrm{d}z| \leqslant 4^2|\int_{\partial\Delta_2} f \, \mathrm{d}z|$.
Fahre induktiv fort und erhalte eine Folge (Δ_n) mit $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ und $|J| \leqslant 4^n|\int_{\partial\Delta_n} f \, \mathrm{d}z|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Es gilt nun für den Umfang der Dreiecke $L(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta_n)$, also $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)$ sowie für den Durchmesser $\mathrm{diam}(\Delta_n) = \sup\{|u - v| : u, v \in \Delta_n\} \leqslant L(\partial\Delta_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und daher $L(\partial\Delta_n), \mathrm{diam}(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.
Nach dem Cantorschen Durchschnittsatz existiert nun genau ein $z_0 \in D$ mit $z_0 \in \Delta_n$

$(n \in \mathbb{N}_0)$ und es ist $z_0 \neq p$ nach Vor. $\Rightarrow f$ ist komplex db in z_0. Sei $\varepsilon > 0$. D ist offen, daher existiert ein $r > 0$, sodass $U_r(z_0) \subseteq D$ und es gilt

$$|f(z) \underbrace{- f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}_{=: h(z)}| \leqslant \varepsilon |z - z_0| \ (z \in U_r(z_0)).$$

Weiter existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_m \subseteq U_r(z_0)$. h hat auf D eine SF, somit ergeben 6.1 und 5.2

$$\left| \int_{\partial \Delta_m} f \, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\partial \Delta_m} (f + h) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon \underbrace{\max_{z \in \partial \Delta_m} |z - z_0|}_{\leqslant \operatorname{diam}(\Delta_m) \leqslant L(\partial \Delta_m)} L(\partial \Delta_m)$$
$$\leqslant \varepsilon L(\partial \Delta_m)^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4^m} L(\partial \Delta)^2.$$

Insgesamt folgt

$$|J| \leqslant 4^m \left| \int_{\partial \Delta_m} f \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon L(\partial \Delta)^2$$

und, da ε beliebig gewählt war, $J = 0$.
Fall 2: $p \in \{u, v, w\}$, etwa $p = u$. Wähle $x \in [u,v], y \in [u,w]$ mit $v \neq x \neq u \neq y \neq w$, so erhalten wir die 3 Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(p,x,y), \Delta_2 = \Delta(x,v,y)$ und $\Delta_3 = \Delta(y,v,w)$. Aus Satz 5.2(2) und Fall 1 folgt nun

$$|J| = \left| \int_{\partial \Delta_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_2} f \, \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_3} f \, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\partial \Delta_1} f \, \mathrm{d}z \right|$$
$$\leqslant \max_{z \in \partial \Delta_1} |f(z)| \cdot L(\partial \Delta_1) \leqslant M \left(|u - x| + |x - y| + |y - u| \right) \to 0 \ ((x,y) \to (u,v))$$

und damit $J = 0$.
Fall 3: $p \in \partial \Delta \setminus \{u,v,w\}$, etwa $p \in [u,w], u \neq p \neq w$. Mithilfe einer Zerlegung in die zwei Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(u,v,p)$ und $\Delta_2 = \Delta(p,v,w)$ folgt aus Fall 2:

$$J = \int_{\partial \Delta_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_2} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Fall 4: $p \in \Delta^\circ$. Dann wähle $x \in [u,v]$, sodass $p \in [x,v]$ und erhalte die Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(u,v,x), \Delta_2 = \Delta(x,v,w)$. Aus Fall 3 folgt

$$J = \int_{\partial \Delta_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_2} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Damit ist insgesamt die Beh. gezeigt. q.e.d.

Definition. $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **konvex** $:\Leftrightarrow \forall u, v \in M : [u, v] \subseteq M$.
Beachte: Ist M offen und konvex, so ist M zhg, also ein Gebiet.

6.3 Satz (Lokaler Cauchyscher Integralsatz). Sei D konvex, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $p \in$

$D, f \in H(D \setminus \{p\})$ und γ ein ssd geschlossener Weg in D. Dann gilt:

(1) f hat auf D eine SF.

(2) $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = 0$.

BEWEIS (1) Sei $a \in D$. D ist konvex, daher ist $[a,z] \subseteq D$ und $F(z) := \int_{[a,z]} f \,\mathrm{d}z$ ist wohldefiniert ($z \in D$). Seien $z, z_0 \in D, z \neq z_0$ und $\Delta := \Delta(a, z_0, z) \subseteq D$. Satz 6.2 ergibt

$$0 = \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}w = \int_{[a,z_0]} f \,\mathrm{d}w + \int_{[z_0,z]} f \,\mathrm{d}w + \int_{[z,a]} f \,\mathrm{d}w = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f \,\mathrm{d}w - F(z),$$

also

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f \,\mathrm{d}w.$$

Wegen $f(z_0) = \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} f(z_0) \,\mathrm{d}w$ ist

$$\varphi(z) := \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(w) - f(z_0)) \,\mathrm{d}w$$

und wir erhalten

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{|z - z_0|} \max_{w \in [z_0,z]} |f(w) - f(z_0)| L([z_0, z]) = \max_{w \in [z_0,z]} |f(w) - f(z_0)| \to 0 \ (z \to z_0),$$

da f stetig ist. Dies bedeutet: F ist in z_0 komplex db mit $F'(z_0) = f(z_0)$.
(2) folgt aus (1) und 6.1. q.e.d.

6.4 Satz (Lokale Cauchysche Integralformel)**.** Sei D konvex, $f \in H(D)$ und γ ein ssd geschlossener Weg in D. Dann gilt:

$$f(z) n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \ (z \in D \setminus |\gamma|).$$

BEWEIS Sei $z \in D \setminus |\gamma|$ und def. $g : D \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z, \\ f'(z) & w = z. \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf D und $g \in H(D \setminus \{z\})$. Aus Satz 6.3 folgt wegen $z \notin |\gamma|$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g \,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \,\mathrm{d}w \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w - f(z) \int_\gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w - f(z) 2\pi i n(\gamma, z) \end{aligned}$$

und daraus die Beh. q.e.d.

Beispiel. Sei $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Wir wollen $\int_\gamma \frac{e^w}{w(w-2)}\,\mathrm{d}w$ berechnen. Eine Partialbruchzerlegung ergibt $\frac{1}{w(w-2)} = \frac{1}{2(w-2)} - \frac{1}{2w}$ und mit Satz 6.4 folgt nun

$$\int_\gamma \frac{e^w}{w(w-2)}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^w}{w-2}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^w}{w}\,\mathrm{d}w = \pi i e^2 n(\gamma, 2) - \pi i e^0 n(\gamma, 0) = -i\pi.$$

6.5 Satz. Sei $f \in H(D), z_0 \in D$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ $(R = \infty$, falls $D = \mathbb{C})$.
Dann existiert eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ $(z \in U_R(z_0))$.

BEWEIS Sei $r \in (0, R)$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. $U_R(z_0)$ ist konvex und $|\gamma| \subseteq U_R(z_0)$, daher ergibt Satz 6.4: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$ $(z \in U_r(z_0))$.
Wegen $U_r(z_0) \subseteq D \setminus |\gamma|$ ergibt Satz 5.3 nun $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ $(z \in U_r(z_0))$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ unabhängig von $r \in (0, R)$. q.e.d.

6.6 Satz. Sei $f \in H(D)$. Dann ist f beliebig oft komplex db, d.h. $f', f'', \ldots \in H(D)$.

BEWEIS Satz 6.5 und Satz 2.2. q.e.d.

6.7 Satz (Morera)**.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und für jedes Dreieck $\Delta \subseteq D$ gelte $\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$.
Dann ist $f \in H(D)$.

BEWEIS Sei $\emptyset \neq D_0 \subseteq D$ offen und konvex. Wie im Beweis von Satz 6.3 sieht man: f hat auf D_0 eine SF F. Damit ist $f = F' \in H(D_0)$ nach Satz 6.6. D_0 bel. $\Rightarrow$ Beh. q.e.d.

6.8 Lemma. Seien $g, h : D \to \mathbb{C}$ stetig, $\mu, m \in \mathbb{N}, a \in D$ und es gelte $h(a) \neq 0 \neq g(a)$ sowie

$$(z - a)^m g(z) = (z - a)^\mu h(z) \ (z \in D).$$

Dann ist $\mu = m$ und $g = h$ auf D.

BEWEIS Annahme: $m \neq \mu$, etwa $m > \mu$. Dann ist $n := m - \mu \in \mathbb{N}$ und es gilt $(z - a)^n g(z) = h(z)$ $(z \in D \setminus \{a\})$ nach Vor. Mit $z \to a$ folgt daraus $h(a) = 0$. ↯ Widerspruch! Also ist $m = \mu$ und aus der Vor. folgt $g = h$ auf $D \setminus \{a\}$. Die Stetigkeit von g und h ergibt nun die Beh. q.e.d.

6.9 Lemma. Sei $f \in H(D), a \in D$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(1) $\exists g \in H(D) : f(z) = (z - a)^m g(z)$ $(z \in D)$ und $g(a) \neq 0$.

(2) $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Dabei sind g und m wegen Lemma 6.8 eindeutig bestimmt. m heißt die **Ordnung** oder **Vielfachheit** der Nullstelle a von f.

BEWEIS (1) $\Rightarrow$ (2): m-faches Differenzieren ergibt $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ und $f^{(m)}(a) = m! \cdot g(a) \neq 0$ nach Vor.
(2) $\Rightarrow$ (1): O.B.d.A. sei $a = 0$. D ist offen, daher existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) = U_r(0) \subseteq D$. Satz 6.5 ergibt: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ $(z \in U_r(0))$. Nach Vor. ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0$ und $a_m \neq 0$, d.h. $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ $(z \in U_r(0))$. Definiere nun $g : D \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & z \neq 0, \\ a_m & z = 0, \end{cases}$$

so ist $g \in H(D \setminus \{0\})$ und $g(z) = a_m + a_{m+1} z + \ldots$ $(z \in U_r(0))$, also auch $g \in H(U_r(0))$. Insgesamt folgt $g \in H(D)$, $f(z) = z^m g(z)$ $(z \in D)$ und $g(0) = a_m \neq 0$. q.e.d.

Wir wissen bereits: Zu $f \in H(D)$ und $w \in D$ existiert ein $R_w > 0$ und eine Folge $(a_n(w))$ in $\mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)(z-w)^n$ $(z \in U_{R_w}(w))$. Dabei ist $a_n(w) = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$.

6.10 Lemma. Seien $f \in H(D), A := \{w \in D : a_n(w) = 0 \ (n \in \mathbb{N}_0)\}$ und $B := D \setminus A$.

(1) $D = A \cup B, A \cap B = \emptyset$.

(2) A und B sind offen.

(3) Ist D ein Gebiet und f auf D nicht konstant, so ist $B = D$.

BEWEIS (1) klar.
(2) Sei $w \in A$, so ist $f = 0$ auf $U_{R_w}(w)$ und damit $f^{(n)}(z) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0, z \in U_{R_w}(w))$. Es folgt $U_{R_w}(w) \subseteq A$, d.h. A ist offen.
Sei $w \in B$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a_m(w) = \frac{f^{(m)}(w)}{m!} \neq 0$. Nach Satz 6.6 ist $f^{(m)}$ stetig, also existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(w) \subseteq D$ und $f^{(m)}(\xi) \neq 0$ $(\xi \in U_\delta(w))$. Das bedeutet $U_\delta(w) \subseteq B$, d.h. B ist offen.
(3) folgt aus (1) und (2), da D zhg und $f \neq 0$. q.e.d.

6.11 Folgerung. Sei D ein Gebiet, $f \in H(D), z_0 \in D$ und $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Dann ist $f = 0$ auf D.

BEWEIS Mit Lemma 6.10: $z_0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow$ Beh. q.e.d.

§ 7 Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $A \subseteq \mathbb{C}$.

(1) $Z(f) := \{z \in D : f(z) = 0\}$.

(2) A heißt **diskret in** D $:\Leftrightarrow$ A hat keine HP in $D \Leftrightarrow \forall a \in D\ \exists r > 0 : U_r(a) \subseteq D$ und $A \cap \dot{U}_r(a) = \emptyset$. In diesem Fall ist A höchstens abzählbar.

7.1 Satz. Sei D ein Gebiet und $f \in H(D)$ auf D nicht konstant. Dann gilt:

(1) $\forall a \in Z(f)\ \exists m \in \mathbb{N}, g \in H(D) : f(z) = (z-a)^m g(z)\ (z \in D)$ und $g(a) \neq 0$.

(2) $Z(f)$ ist diskret in D.

BEWEIS (1) Es ist $B = D$ wie in Lemma 6.10. Sei $a \in Z(f)$, so ex. nach Satz 6.5 ein $r > 0$, sodass $U_r(a) \subseteq D$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ $(z \in U_r(a))$, wobei $a_0 = f(a) = 0$. Wegen $a \in B$ ist $M := \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \neq \emptyset$ und es ex. $m := \min M \in \mathbb{N}$, d.h. $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ und $a_m \neq 0$. Mit Lemma 6.9 folgt die Beh.
(2) Sei $a \in Z(f)$ und m, g wie in (1), so gilt $g(a) \neq 0$. g stetig, daher ex. ein $r > 0$, sodass $U_r(a) \subseteq D$ und $g(z) \neq 0$ $(z \in U_r(a))$. Damit ist auch $f(z) \neq 0$ $(z \in \dot{U}_r(a))$. q.e.d.

7.2 Satz (Identitätssatz)**.** Sei D ein Gebiet, $f, g \in H(D)$ und $A := \{z \in D : f(z) = g(z)\} \subseteq D$ habe einen HP in D. Dann ist $f = g$ auf D.

BEWEIS Sei $h := f - g$, so ist $Z(h) = A$ nicht diskret in D. D ist ein Gebiet und h hat Nullstellen auf D, daher folgt $h = 0$ auf D nach Satz 7.1. q.e.d.

Beispiel. (1) Wir wollen alle $f \in H(\mathbb{D})$ bestimmen mit $f(\frac{1}{7n}) = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Sei f eine solche Funktion und $g(z) := 7z$. Dann ist $f(\frac{1}{7n}) = \frac{1}{n} = g(\frac{1}{7n})$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $B := \{\frac{1}{7n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{f = g\} =: A$ hat den HP $0 \in \mathbb{D}$, also auch A. Aus Satz 7.2 folgt $f = g$ auf $\mathbb{D}$, d.h. $f(z) = 7z$.
Fordert man zusätzlich etwa $f(\frac{39}{81}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so kann kein solches f existieren.

(2) Gibt ein es $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$? Sei f derart, so ist $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$, wie in (1) sieht man: $f(z) = z$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann ist aber $\frac{1}{2n+1} = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{-1}{2n+1}$. ↯

Ab nun bis vor Satz 7.9 sei stets $a \in D$ und $f \in H(D \setminus \{a\})$. In dieser Situation heißt a eine **isolierte Singularität** von f.

Definition. a heißt eine **hebbare Singularität** (HS) von $f :\Leftrightarrow \exists g \in H(D) : f = g$ auf $D \setminus \{a\}$. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt; g heißt die **holomorphe Fortsetzung** von f in a und wird mit f bezeichnet.

Beispiel. (1) $a = 0, D = \mathbb{C}$ und $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für $z \neq 0$:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \pm \dots =: g(z).$$

Dann ist $g \in H(\mathbb{C})$ die holomorphe Fortsetzung von f in 0 und 0 ist eine HS von f. Beachte: $g(0) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

(2) $a = 0, D = \mathbb{C}$ und $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) = e^n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Daher ist 0 keine HS von f.

7.3 Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f hat in a eine HS.

(2) $\exists r > 0 : U_r(a) \subseteq D$ und f ist auf $\dot{U}_r(a)$ beschränkt.

(3) $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ existiert in $\mathbb{C}$.

BEWEIS (1) $\Rightarrow$ (2) und (3) $\Rightarrow$ (2): klar.
(2) $\Rightarrow$ (1),(3): Definiere $h : D \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a, \\ 0 & z = a. \end{cases}$$

Dann ist h stetig nach Vor., $h \in H(D \setminus \{a\})$ und $h(a) = 0$. Für $z \neq a$:

$$\frac{h(z) - h(a)}{z - a} = (z-a)f(z) \to 0 \ (z \to a),$$

da f nach Vor. beschränkt bleibt. Damit ist h komplex db in a mit $h'(a) = 0$, d.h. $h \in H(D)$. Aus Satz 6.5 folgt: $h(z) = a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$ $(z \in U_r(a))$, also

$$f(z) = a_2 + a_3(z-a) + \dots =: \tilde{g}(z) \ (z \in \dot{U}_r(a)),$$

wobei $\tilde{g} \in H(U_r(a))$. Definiere nun

$$g(z) := \begin{cases} \tilde{g}(z) & z \in U_r(a), \\ f(z) & z \in D \setminus U_r(a), \end{cases}$$

so ist $g \in H(D)$ und $f = g$ auf $D \setminus \{a\}$, d.h. a ist eine HS von f und $\lim\limits_{z \to a} f(z) = g(a)$.

q.e.d.

7.4 Definition. f hat in a einen Pol $:\Leftrightarrow$

$$\exists g \in H(D), m \in \mathbb{N} : f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \; (z \in D \setminus \{a\}) \text{ und } g(a) \neq 0.$$

Wie in Lemma 6.8 sieht man: g, m sind eindeutig bestimmt. m heißt die **Ordnung** oder **Vielfachheit** des Pols a von f.

7.5 Folgerung. Hat f in a einen Pol, so gilt: $|f(z)| \to \infty$ $(z \to a)$.

Beispiel. (1) Sei $m \in \mathbb{N}$, so hat $z \mapsto \frac{1}{z^m}$ in $a = 0$ einen Pol der Ordnung m.

(2) Sei $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ und g die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ auf $\mathbb{C}$. Dann ist $g(0) = 1 \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{z^3}$, d.h. f hat in $a = 0$ einen Pol der Ordnung 3.

(3) Sei $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Für $n \in \mathbb{N} : |f(-\frac{1}{n})| = e^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach 7.5 hat f daher keinen Pol in $a = 0$. Betrachte alternativ $|f(\frac{1}{in})| = |e^{in}| = 1$.

Definition. Hat f in a weder eine HS noch einen Pol, so heißt a eine **wesentliche Singularität** (WS) von f.

Beispiel. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat eine WS in $a = 0$.

7.6 Satz (Casorati-Weierstraß). Sei a eine WS von f und $r > 0$ so, dass $U_r(a) \subseteq D$. Dann ist

$$\overline{f(\dot{U}_r(a))} = \mathbb{C}.$$

BEWEIS Sei $w_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: $\exists z_0 \in \dot{U}_r(a) : |f(z_0) - w_0| < \varepsilon$. O.B.d.A. sei $w_0 = 0 = a$. Setze $U := U_r(0)$ und $\dot{U} := \dot{U}_r(0)$. Annahme: $\forall z \in \dot{U} : |f(z)| \geqslant \varepsilon$.
Definiere $g : \dot{U} \to \mathbb{C}$ durch $g(z) := \frac{1}{f(z)}$, so ist $g \in H(\dot{U}), g(z) \neq 0$ und $|g(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ $(z \in \dot{U})$.
Satz 7.3 ergibt: g hat in $a = 0$ eine HS, also $g \in H(D)$.
Fall 1: $g(0) \neq 0 \Rightarrow g(z) \neq 0$ $(z \in U) \Rightarrow f$ hat in $a = 0$ eine HS. ↯ Widerspruch!
Fall 2: $g(0) = 0$. Aus Satz 7.1 folgt: $\exists m \in \mathbb{N}, h \in H(U) : g(z) = z^m h(z)$ und $h(0) \neq 0$. Dann ist $h(z) \neq 0$ $(z \in U)$ und $f(z) = \frac{h(z)^{-1}}{z^m}$ $(z \in \dot{U})$, d.h. nach 7.4 hat f in $a = 0$ einen Pol der Ordnung m. ↯ Widerspruch! Insgesamt folgt die Beh. q.e.d.

Beispiel. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} \neq 0 \Rightarrow \forall r > 0 : f(\dot{U}_r(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach Satz 7.6. Damit ist $f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $g(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z}}$ gilt: $g(\dot{U}_{\frac{1}{2}}(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g(\dot{U}_2(0)) = \mathbb{C}$.

Bemerkung. Weiter als Satz 7.6 sagt der Große Satz von Picard sogar:

$$\exists c \in \mathbb{C} : \mathbb{C} \setminus \{c\} \subseteq f(\dot{U}_r(a)).$$

7.7 Satz (Klassifikation isolierter Singularitäten)**.**

(1) f hat in a eine HS $\Leftrightarrow$ Es gilt (2) oder (3) in Satz 7.3.

(2) f hat in a einen Pol $\Leftrightarrow |f(z)| \to \infty \ (z \to a)$.

(3) f hat in a eine WS $\Leftrightarrow \exists r > 0 : U_r(a) \subseteq D$ und $\overline{f(\dot{U}_r(a))} = \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \forall r > 0$ mit $U_r(a) \subseteq D$ gilt: $\overline{f(\dot{U}_r(a))} = \mathbb{C}$.

7.8 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}$.
f hat in a einen Pol der Ordnung $m \Leftrightarrow L := \lim_{z \to a} (z-a)^m f(z)$ existiert und $L \neq 0$.

BEWEIS Übung. q.e.d.

Beispiel. (1) $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$. Mit Lemma 7.8: $(z-\pi)^2 f(z) \to 0 \ (z \to \pi) \Rightarrow f$ hat in $a = \pi$ keinen Pol der Ordnung 2. Aber:

$$(z-\pi)f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi} = \frac{\sin z - \sin \pi}{z - \pi} \to \cos \pi = -1 \neq 0 \ (z \to \pi).$$

Daher hat f in $a = \pi$ einen Pol der Ordnung 1.

(2) $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}$. Es gilt $e^{\frac{1}{z}} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{1}{z} = 2k\pi i$, daher setze

$$D := \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2k\pi i} : k \in \mathbb{Z}\}).$$

Übung: $\frac{1}{2k\pi i}$ ist ein Pol der Ordnung 1 von f $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Damit ist 0 keine isolierte Singularität von f.

7.9 Satz (Cauchysche Integralformel für Ableitungen)**.** Sei D konvex, $f \in H(D)$ und γ ein ssd geschlossener Weg in D. Dann gilt:

$$f^{(n)}(z) n(\gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \ (z \in D \setminus |\gamma|, n \in \mathbb{N}_0).$$

BEWEIS $n = 0$: siehe Satz 6.4. Wir zeigen nur $n = 1$, $n \to n+1$ analog. Sei $z \in D \setminus |\gamma|$, o.B.d.A. $z = 0$. Dann ex ein $r > 0$, sodass $U_r(0) \subseteq D \setminus |\gamma|$. Sei $h \in \mathbb{C}$ mit $0 < |h| < \frac{r}{2}$ und

$$\varphi(h) := \frac{f(h) - f(0)}{h} n(\gamma, 0) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w^2} \,\mathrm{d}w.$$

Aus Satz 5.4 folgt $n(\gamma,h)=n(\gamma,0)$ und mit Satz 6.4 daher

$$\begin{aligned}\varphi(h)&=\frac{1}{h}f(h)n(\gamma,h)-\frac{1}{h}f(0)n(\gamma,0)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w^2}\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{h\cdot 2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-h}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{h\cdot 2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w^2}\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h\cdot f(w)}{w^2(w-h)}\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit nachzurechnen ist. Sei $M:=\max\limits_{w\in|\gamma|}|f(w)|$. Für $w\in|\gamma|$ gilt $|w|\geqslant r, |w-h|\geqslant\frac{r}{2}$ und daher

$$\frac{|h\cdot f(w)|}{|w^2(w-h)|}\leqslant\frac{M|h|}{r^2\cdot\frac{r}{2}}=\frac{2M|h|}{r^3}.$$

Es folgt nun

$$0\leqslant|\varphi(h)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{2M|h|}{r^3}\,\mathrm{d}w\leqslant\frac{M|h|}{\pi r^3}L(\gamma)\to 0\ (h\to 0)$$

und damit induktiv die Beh. q.e.d.

7.10 Satz (Cauchysche Abschätzungen)**.** Sei $R>0, z_0\in\mathbb{C}, f\in H(U_R(z_0)), M\geqslant 0$ und $|f|\leqslant M$ auf $U_R(z_0)$. Dann gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant M\frac{n!}{R^n}\ (n\in\mathbb{N}).$$

BEWEIS Sei $r\in(0,R)$ und $\gamma(t):=z_0+re^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$. Aus Satz 7.9 folgt

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Damit gilt für $w\in|\gamma|:|f(w)|\leqslant M, |w-z_0|=r$ sowie

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}L(\gamma)=\frac{Mn!}{r^n}.$$

Das zeigt die Beh. q.e.d.

7.11 Satz (Liouville)**.** Sei $f\in H(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Dann ist f auf $\mathbb{C}$ konstant.

BEWEIS Nach Vor. ex ein $M\geqslant 0$, sodass $|f|\leqslant M$ auf $\mathbb{C}$. Sei $z_0\in\mathbb{C}$ und $R>0$. Aus Satz 7.10 folgt

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R}\to 0\ (R\to 0),$$

also $f'=0$ auf $\mathbb{C}$. Mit Satz 3.2 folgt die Beh. q.e.d.

Beispiel. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leqslant |z|$ $(z \in \mathbb{C})$. Definiere $h(z) := \frac{f(z)}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, so ist $|h| \leqslant 1$ auf $\mathbb{C}$. Nach Satz 7.3 hat h eine HS in $a = 0$, d.h. $h \in H(\mathbb{C})$ mit

$$h(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0).$$

Nach Satz 7.11 ist h auf $\mathbb{C}$ beschränkt, d.h. es ex. ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leqslant 1$ und $f(z) = cz$ $(z \in \mathbb{C})$. Analog folgt aus $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ auch $f = cg$ auf $\mathbb{C}$.

Bemerkung. Der kleine Satz von Picard besagt: Ist $f \in H(\mathbb{C}); a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$ und $a, b \notin f(\mathbb{C})$, so ist f auf $\mathbb{C}$ konstant.

7.12 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Sei $n \in \mathbb{N}; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Dann ist $Z(p) \neq \emptyset$.

BEWEIS O.b.d.A. sei $a_n = 1$. Setze $c := 1 + 2|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$. Sei $r \geqslant c \geqslant 1$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &\geqslant r^n - r^{n-1}|a_{n-1}| - \ldots - r|a_1| - |a_0| \\
&= r^{n-1}(r - |a_{n-1}| - \ldots - |a_0| r^{1-n}) \\
&\geqslant r^{n-1}(c - |a_{n-1}| - \ldots - |a_1| - |a_0|) \\
&= r^{n-1}(1 + |a_0|) \geqslant 1 + |a_0| \geqslant |a_0| = |p(0)|,
\end{aligned}$$

also $|p(0)| \leqslant |p(z)|$ $(|z| \geqslant c)$. <u>Annahme:</u> $Z(p) = \emptyset$. Dann ist $\frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ und $|\frac{1}{p(z)}| \leqslant |\frac{1}{p(0)}|$ $(|z| \geqslant c)$. $\frac{1}{p}$ ist stetig, also auch auf $\overline{U_c(0)}$ beschränkt. Nach Satz 7.11 ist $\frac{1}{p}$ auf $\mathbb{C}$ konstant, also auch p. $\lightning$ Widerspruch zu $a_n \neq 0$! q.e.d.

Beispiel. Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, die Gleichung $v^2 - 2iw_0 - 1 = 0$ gegeben und $v_0 \neq 0$ eine Lösung dieser Gleichung (ex. nach Satz 7.12), d.h. $v_0 + \frac{1}{v_0} = 2iw_0$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $e^{iz} = v_0$ (ex. nach Satz 4.1). Dann gilt $e^{iz_0} + e^{-iz_0} = 2iw_0$, also $\sin z_0 = w_0$. Insgesamt: $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$; analog $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

7.13 Lemma. Sei $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0, f \in H(U_R(z_0)), r \in (0, R), M := \min\limits_{|z - z_0| = r} |f(z)|$ und es gelte $|f(z_0)| < M$. Dann ex. ein $w_0 \in U_r(z_0)$, sodass $f(w_0) = 0$.

BEWEIS O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Definiere $\gamma(t) := re^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$. <u>Annahme:</u> $f(z) \neq 0$ $(z \in U_r(0))$. Dann ist $f(z) \neq 0$ $(z \in \overline{U_r(0)})$ und wegen der Stetigkeit von f ex. ein $\varrho \in (r, R)$, sodass $f(z) \neq 0$ $(z \in \overline{U_\varrho(0)})$. Damit ist $g := \frac{1}{f} \in H(U_\varrho(0))$ und aus Satz 6.4 folgt

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{w} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{f(w)w} \,\mathrm{d}w.$$

Für $w \in |\gamma|$ gilt $|w| = r$ und $|f(w)| \geqslant \min\limits_{|z| = r} |f(z)| = M$, sodass sich

$$|g(0)| \leqslant \frac{L(\gamma)}{2\pi r M} = \frac{1}{M}$$

und damit $M \leqslant \frac{1}{|g(0)|} = |f(0)| < M$ nach Vor. ergibt. ↯ Widerspruch! q.e.d.

7.14 Satz (Gebietstreue)**.** Sei D ein Gebiet und $f \in H(D)$ auf D nicht konstant. Dann ist $f(D)$ ein Gebiet. Ist D nur offen, so ist auch $f(D)$ offen.

BEWEIS Wegen der Stetigkeit von f ist $f(D)$ zhg (Analysis I/ II).
Sei $w_0 \in f(D)$, dann ex. ein $z_0 \in D$, sodass $f(z_0) = w_0$. O.B.d.A. sei $w_0 = 0 = z_0$, also $f(0) = 0$. Nach Satz 7.1 ex. ein $\varrho > 0$, sodass $\overline{U_\varrho(0)} \subseteq D$ und $f(z) \neq 0$ $(z \in \overline{U_\varrho(0)} \setminus \{0\})$. Da f stetig ist, ex. ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(z)| \geqslant 3\varepsilon$ $(z \in \partial U_\varrho(0))$. Sei $w \in U_\varepsilon(0)$ und $z \in \partial U_\varrho(0)$, so ist

$$|f(z) - w| \geqslant |f(z)| - |w| \geqslant 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon$$

und es ergibt sich

$$|f(0) - w| = |w| < \varepsilon < 2\varepsilon \leqslant \min_{z \in \partial U_\varrho(0)} |f(z) - w|.$$

Aus Lemma 7.13 folgt: $\exists z_1 \in U_\varrho(0) : f(z_1) - w = 0$, d.h. $w = f(z_1) \in f(D)$. q.e.d.

7.15 Satz (Maximum- und Minimumprinzip)**.** Sei D ein Gebiet und $f \in H(D)$ auf D nicht konstant. Dann gilt:

(1) (Maximumprinzip I) $|f|$ hat auf D kein lokales Maximum.

(2) (Minimumprinzip) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf D kein lokales Minimum.

(3) (Maximumprinzip II) Ist D beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt:

$$|f(z)| < \max_{w \in \partial D} |f(w)| \ (z \in D).$$

BEWEIS (1) Annahme: $\exists a \in D, r > 0 : U_r(a) \subseteq D$ und $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ $(z \in U_r(a))$. Es ist $b := f(a) \in f(U_r(a))$ und $f(U_r(a))$ ist offen nach Satz 7.14. Wähle $c \in f(U_r(a))$ so, dass $|c| > |b|$, dann ex. ein $z_1 \in U_r(a)$, sodass $f(z_1) = c$. Damit:

$$|b| < |c| = |f(z_1)| \leqslant |f(a)| = |b| \text{ ↯ Widerspruch!}$$

(2) folgt aus (1) mit $\frac{1}{f}$.
(3) $\overline{D}$ ist kompakt, daher ex. ein $w_0 \in \overline{D}$, sodass $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = |f(w_0)|$. Wegen (1) ist $w_0 \notin D$, also $w_0 \in \partial D$. q.e.d.

7.16 Lemma (Schwarz)**.** Sei $f \in H(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann gilt:

(1) $|f(z)| \leqslant |z|$ $(z \in \mathbb{D})$ und $|f'(0)| \leqslant 1$.

(2) Ist $|f'(0)| = 1$ oder ex. ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so ex. ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = cz$ $(z \in \mathbb{D})$.

BEWEIS (1) Nach Satz 6.5 ist $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ $(z \in \mathbb{D})$. Sei $g(z) := a_1 + a_2 z + a_3 z^2$ $(z \in \mathbb{D})$, so ist $g \in H(\mathbb{D}), g(z) = \frac{f(z)}{z}$ $(z \in \mathbb{D} \setminus \{0\})$ und $g(0) = a_1 = f'(0)$. Sei $z \in \mathbb{D}$ und $r > 0$ so, dass $|z| < r < 1$. Dann gilt mit Satz 7.15:

$$|g(z)| \leqslant \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leqslant \frac{1}{r} \to 1 \ (r \to 1)$$

nach Vor., also $|g(z)| \leqslant 1$ $(z \in \mathbb{D})$. Es folgt $|f(z)| \leqslant |z|$ $(z \in \mathbb{D} \setminus \{0\})$ und wegen $|f(0)| = 0$ und $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$ daraus die Beh.
(2) Nach Vor. ist $|g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$, d.h. $|g|$ hat ein Maximum auf $\mathbb{D}$. Aus Satz 7.15 folgt: $\exists c \in \mathbb{C} : g = c$ auf $\mathbb{D}$, also $|c| = 1$ und $f(z) = zg(z) = cz$ $(z \in \mathbb{D})$. q.e.d.

§ 8 Lokale Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

8.1 Lemma. Sei $f \in H(D)$ und $g : D \times D \to \mathbb{C}$ def. durch

$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w, \\ f'(z) & z = w. \end{cases}$$

Dann ist g stetig.

BEWEIS Klar: g stetig in $(z,w) \in D \times D$ für $z \neq w$.
Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta(a) \subseteq D$ und $|f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$ $(z \in U_\delta(a))$. Seien $z, w \in U_\delta(a)$ und $\gamma(t) := (1-t)z + tw$ $(t \in [0,1])$. $U_\delta(a)$ ist konvex, daher ist $|\gamma| = [z,w] \subseteq U_\delta(a)$. Fall 1: $z = w$. Dann ist $\gamma(t) = z$ $(t \in [0,1])$ und daher

$$\begin{aligned} \int_0^1 \big(f'(\gamma(t)) - f'(a)\big)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \big(f'(z) - f'(a)\big)\,\mathrm{d}t = f'(z) - f'(a) \\ &= g(z,z) - g(a,a) = g(z,w) - g(a,a). \end{aligned}$$

Fall 2: $z \neq w$. Für $h := f \circ \gamma$ gilt $h'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f'(\gamma(t))(w-z)$, also $f'(\gamma(t)) = \frac{h'(t)}{w-z}$ $(t \in [0,1])$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \big(f'(\gamma(t)) - f'(a)\big)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{w-z}\int_0^1 h'(t)\,\mathrm{d}t - f'(a) = \frac{h(1)-h(0)}{w-z} - f'(a) \\ &= \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(a) = g(z,w) - g(a,a). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$|g(z,w) - g(a,a)| \leqslant \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(a)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

und daraus die Beh. q.e.d.

8.2 Satz. Sei $f \in H(D), z_0 \in D$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann: $\exists r > 0 : U_r(z_0) \subseteq D$ und

(1) $|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \frac{1}{2}|f'(z_0)||z_1 - z_2|$ $(z_1, z_2 \in U_r(z_0))$.

(2) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv.

(3) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet.

(4) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ mit $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ $(w \in f(U_r(z_0)))$.

BEWEIS (1) folgt aus Lemma 8.1. (2) folgt aus (1). (3) folgt aus Satz 7.14.
(4) Seien $z_1, z_2 \in U_r(z_0)$ und $w_j = f(z_j)$, d.h. $z_j = f^{-1}(w_j)$ für $j \in \{1, 2\}$. Aus (1) folgt:

$$|w_1 - w_2| \geqslant \frac{1}{2}|f'(z_0)||f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)|,$$

also ist f^{-1} Lipschitz-stetig auf $U_r(z_0)$. Rest wie in Analysis I. q.e.d.

8.3 Satz. Sei D ein Gebiet, $f \in H(D), m \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in D$ eine m-fache Nullstelle von $f - f(z_0)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von x_0, sodass gilt:

$w \in f(U) \setminus \{f(z_0)\} \Rightarrow \exists z_1, \ldots, z_m \in U : z_j \neq z_k$ $(j \neq k)$ und $f(z_j) = w$ $(j \in \{1, \ldots, k\})$.

Ohne BEWEIS.

8.4 Satz. Ist $f \in H(D)$ auf D injektiv, so ist $f' \neq 0$ auf D.

BEWEIS Sei $z_0 \in D$. Annahme: $f'(z_0) = 0$. Sei D_0 die ZK von D mit $z_0 \in D$. z_0 ist eine m-fache Nullstelle von $f - f(z_0), m \geqslant 2$. Satz 8.3 ergibt eine offene Umgebung $U \subseteq D_0$ von z_0, sodass für $w \in f(U) \setminus \{f(z_0)\}$ gilt:

$$\exists z_1, z_2 \in U : z_1 \neq z_2, f(z_1) = w = f(z_2).$$

Nach Vor. folgt $z_1 = z_2$ ↯ Widerspruch! q.e.d.

8.5 Satz (Injektivitätskriterium)**.**
Sei D konvex, $f \in H(D)$ und $\mathfrak{Re}\, f' \neq 0$ oder $\mathfrak{Im}\, f' \neq 0$ auf D. Dann ist f auf D injektiv.

BEWEIS O.B.d.A. $\mathfrak{Re}\, f' \neq 0$. Seien $z, w \in D$ und $\gamma(t) := z + t(w - z)$ $(t \in [0{,}1])$. Nach Vor. ist $|\gamma| \subseteq D, h := \mathfrak{Re}\,(f' \circ \gamma)$ ist stetig und $h \neq 0$ auf $[0{,}1]$. Nach dem Zwischenwertsatz ist also $h > 0$ oder $h < 0$ auf $[0{,}1]$, etwa $h > 0$. Damit folgt aus Satz 6.1:

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ &= \int_\gamma f' \,\mathrm{d}u = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (w - z)\left[\int_0^1 \underbrace{\mathfrak{Re}\,(f'(\gamma(t)))}_{=h(t)>0}\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 \mathfrak{Im}\,(f'(\gamma(t)))\,\mathrm{d}t\right] \neq 0 \end{aligned}$$

und daraus die Beh. q.e.d.

Beispiel. Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\, z \in (0,\pi)\}$ (D ist konvex) und $f(z) = z + e^z$. Sei $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), so ist $f'(z) = 1 + e^z = 1 + e^x(\cos y + i \sin y)$, also $\mathfrak{Im}\, f'(z) = e^x \sin y > 0$ ($z \in D$). Mit Satz 8.5 folgt: f ist injektiv auf D.

Bemerkung. In $\mathbb{C}$ gibt es keine vergleichbare Version des Mittelwertsatzes: Für $f(t) := e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) würde dann gelten: $0 = f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)(2\pi - 0) \neq 0$ ↯

§ 9 Der Konvergenzsatz von Weierstraß

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge in $H(D)$.

Definition. (f_n) konvergiert auf D **lokal gleichmäßig** (lokal glm) $:\Leftrightarrow$ (f_n) konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von D glm.

Beispiel. Jede PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit KR $R > 0$ konvergiert lokal glm auf $U_R(z_0)$.

9.1 Lemma. Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und für $r > 0 : E_r := \bigcup\limits_{z \in K} \overline{U_r(z)}$. Dann gilt:

(1) $K \subseteq E_r$.

(2) E_r ist kompakt.

(3) Ist $K \subseteq D$, dann ex. ein $r > 0$, sodass $E_r \subseteq D$.

BEWEIS (1) klar. (2) Nach Vor. ex. ein $c \geqslant 0$, sodass $|z| \leqslant c$ $(z \in K)$. Sei $w \in E_r$, dann ex. ein $z \in K$, sodass $w \in \overline{U_r(z)}$. Es folgt

$$|w| = |w - z + z| \leqslant |w - z| + |z| \leqslant r + c,$$

also ist E_r beschränkt. Sei (w_n) eine konvergente Folge in E_r und $w_0 := \lim_{n\to\infty} w_n$. Zu w_n ex. ein $z_n \in K$, sodass $w_n \in \overline{U_r(z_n)}$, d.h. $|w_n - z_n| \leqslant r$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Bolzano-Weierstraß enthält (z_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $z_0 \in K$; o.B.d.A. $z_n \to z_0$. Damit ist $|w_0 - z_0| \leqslant r$, d.h. $w_0 \in \overline{U_r(z_0)} \subseteq E_r$. Also ist E_r auch abgeschlossen. (3) Annahme: $\forall r > 0 : E_r \nsubseteq D$. Dann ist auch $E_{\frac{1}{n}} \nsubseteq D$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. zu $n \in \mathbb{N}$ ex. ein $w_n \in E_{\frac{1}{n}}$, sodass $w_n \in \mathbb{C} \setminus D$. Zu diesen w_n ex. $z_n \in K$, sodass $w_n \in \overline{U_r(z_n)}$, also $|w_n - z_n| < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. K ist kompakt, also o.B.d.A. $z_n \to z_0 \in K$ wie in (2), damit auch $w_n \to z_0$. Da D offen ist, folgt nun: $\mathbb{C} \setminus D$ ist abgeschlossen und daher $z_0 = \lim_{n\to\infty} w_n \in \mathbb{C} \setminus D$ ↯ Widerspruch zu $z_0 \in D$! q.e.d.

9.2 Satz (Konvergenzsatz von Weierstraß). (f_n) konvergiere auf D lokal glm gegen $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \in H(D)$ und (f_n') konvergiert auf D lokal glm gegen f'.

BEWEIS Nach Analysis I/ II ist f stetig auf D. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. Aus Vor. und Satz 5.2 folgt:

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n \,\mathrm{d}z \to \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z \ (n \to \infty),$$

also $\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0$. Da $\Delta \subseteq D$ beliebig war, folgt aus Satz 6.2: $f \in H(D)$. Sei $g_n := f_n - f$, $\emptyset \neq K \subseteq D$ kompakt und $\alpha_n := \max\limits_{z \in K} |g_n'(z)|$. Nach Lemma 9.1 ex. ein $r > 0$, sodass $E_r \subseteq D$, d.h. $\overline{U_r(z)} \subseteq D$ $(z \in K)$. Satz 7.10 ergibt:

$$|g_n'(z)| \leqslant \max_{w \in \overline{U_r(z)}} \frac{|g_n(w)|}{r} \leqslant \frac{1}{r} \max_{w \in E_r} |g_n(w)| =: \beta_n.$$

Da (g_n) auf E_r glm konvergiert, ist (β_n) eine Nullfolge und wegen $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ auch (α_n). Das zeigt die Beh. q.e.d.

§ 10 Der globale Cauchysche Integralsatz

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen.
Für $K \subseteq \mathbb{C} : C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$.

Definition. Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ ssd Wege in $\mathbb{C}$. Die formale Summe $\Gamma := \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_m$ ist definiert über

$$|\Gamma| := |\gamma_1| \cup \ldots \cup |\gamma_m| \text{ und } \int_\Gamma f \, \mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f \, \mathrm{d}z$$

für jedes $f \in C(|\Gamma|)$ und heißt eine **Kette**. Für $|\Gamma| \subseteq D$ heißt Γ eine Kette in D. Sind alle γ_j geschlossen, so heißt Γ ein **Zyklus**. Definiere weiter $\Gamma^- := \gamma_1^- \oplus \ldots \oplus \gamma_m^-$ sowie für einen Zyklus Γ und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ die Umlaufzahl:

$$n(\Gamma, \alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - \alpha} \, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, \alpha).$$

Für Ketten Γ_1, Γ_2 definiere $\Gamma_3 := \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ über

$$|\Gamma_3| := |\Gamma_1| \cup |\Gamma_2| \text{ und } \int_{\Gamma_3} f \, \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f \, \mathrm{d}z$$

für jedes $f \in C(|\Gamma_3|)$.

Definition. Seien $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ Zyklen in D.

(1) Γ heißt **nullhomolog** in $D :\Leftrightarrow n(\Gamma, \alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C} \setminus D)$.

(2) Γ_1, Γ_2 heißen **homolog** in $D :\Leftrightarrow \Gamma_1 \oplus \Gamma_2^-$ ist nullhomolog in D
$\Leftrightarrow n(\Gamma_1, \alpha) = n(\Gamma_2, \alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C} \setminus D)$.

(3) Sei D ein Gebiet. D heißt **einfach zusammenhängend** (einfach zhg) $:\Leftrightarrow$
Jeder Zyklus in D ist nullhomolog in D.

Beispiel. Ist D konvex, so ist D einfach zhg.
Ist nämlich γ ein ssd geschlossener Weg in D und $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$, so ist $2\pi i n(\gamma, \alpha) = \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} \, \mathrm{d}z = 0$ nach Satz 6.3, da D konvex ist. Also ist auch $n(\Gamma, \alpha) = 0$ für jeden Zyklus Γ in D.

10.1 Satz (Globaler Cauchyscher Integralsatz und globale Cauchysche Integralformel)**.** Sei $f \in H(D)$; Γ, Γ_1 und Γ_2 Zyklen in D, Γ nullhomolog in D und Γ_1, Γ_2 homolog in D.

(1) $\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = 0$.

(2) $\int_{\Gamma_1} f \,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f \,\mathrm{d}z$.

(3) $f(z) n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$ $(z \in D \setminus |\Gamma|)$.

BEWEIS (1) Sei $a \in D \setminus |\Gamma|$ und $F(z) := (z-a) f(z)$ $(z \in D)$. Dann ist $F \in H(D)$ und $f(z) = \frac{F(z)}{z-a}$ $(z \in D \setminus \{a\})$. Aus (3) folgt

$$\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z = 2\pi i F(a) n(\Gamma, a) = 0.$$

(2) Definiere $\Gamma_0 := \Gamma_1 \oplus \Gamma_2^-$, so ist Γ_0 nullhomolog in D nach Vor. Aus (1) folgt

$$0 = \int_{\Gamma_0} f \,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f \,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f \,\mathrm{d}z$$

und daraus die Beh.
(3) Übung: $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| : n(\Gamma, z) = 0\}$ ist offen. Nach Vor. ist $\mathbb{C} \setminus D \subseteq D_1$, also $D \cup D_1 = \mathbb{C}$. Definiere $h : D_1 \to \mathbb{C}$ durch

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w,$$

so ist $h_1 \in H(D_1)$ nach Satz 5.3. Aus Satz 5.4 folgt: Die unbeschränkte ZK von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ liegt in D_1, d.h. D_1 ist unbeschränkt. Also gilt $h_1(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$. Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$,

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w, \\ f'(z) & z = w, \end{cases}$$

dann ist g stetig nach Lemma 8.1. Definiere weiter $h : D \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w) \,\mathrm{d}w,$$

so erhält man für $z \in D \setminus |\Gamma|$:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \frac{f(z)}{2\pi i} n(\Gamma, z).$$

Zu zeigen ist also $h = 0$ auf $D \setminus |\Gamma|$. Auf $D \cap D_1$ ist $h = h_1$, daher ist $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\Psi(z) := \begin{cases} h_1(z) & z \in D_1, \\ h(z) & z \in D \end{cases}$$

wohldefiniert und es gilt $\Psi(z) \to 0$ ($|z| \to \infty$).
Sei $z_0 \in D$ und (z_n) eine Folge in D, $z_n \to z_0$. Für $w \in |\Gamma|$ setze $\varphi_n(w) := g(z_n, w)$ und $\varphi(w) := g(z_0, w)$. Übung: (φ_n) konvergiert auf $|\Gamma|$ glm gegen φ. Mit Satz 5.2 ist daher

$$h(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi_n(w) \, \mathrm{d}w \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(w) \, \mathrm{d}w = h(z_0) \ (n \to \infty),$$

d.h. h ist stetig auf D. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. Für $w \in |\Gamma|$ hat $z \mapsto g(z, w)$ eine HS in w und ist daher wegen Satz 7.3 holomorph auf D. Nach Satz 6.2 ist $\int_{\partial\Delta} g(z, w) \, \mathrm{d}z = 0$ und mit dem Satz von Fubini daher

$$2\pi i \int_{\partial\Delta} h(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(z, w) \, \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z = \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z, w) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w = 0.$$

Aus Satz 6.7 folgt: $h \in H(D)$, also auch $\Psi \in H(\mathbb{C})$. Da Ψ beschränkt ist, muss Ψ nach Satz 7.11 auf $\mathbb{C}$ konstant sein, nämlich $\Psi = 0$ auf $\mathbb{C}$ (siehe oben). Damit ist auch $h = 0$ auf D und es folgt die Beh. q.e.d.

10.2 Satz (Cauchy für einfach zhg Gebiete)**.**
Sei D ein einfach zhg Gebiet und Γ ein Zyklus in D. Dann gilt:

(1) $\int_\Gamma f \, \mathrm{d}z = 0$.

(2) $f^{(n)}(z) n(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w$ ($z \in D \setminus |\Gamma|, n \in \mathbb{N}_0$).

BEWEIS (1) Nach Vor. ist Γ nullhomolog in D, daher folgt die Beh. aus Satz 10.1(1).
(2) Für $n = 0$ siehe Satz 10.1(3). $n \geqslant 1$: Wie in Satz 7.9. q.e.d.

10.3 Satz. Sei D ein einfach zhg Gebiet und $f \in H(D)$. Es gilt:

(1) f besitzt auf D eine SF.

(2) Ist $Z(f) = \emptyset$, dann ex. ein $g \in H(D)$, sodass $e^g = f$ auf D.
g heißt ein **holomorpher Logarithmus** von f auf D.

(3) Ist $Z(f) = \emptyset$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ex. ein $h \in H(D)$, sodass $h^n = f$ auf D.
h heißt eine **holomorphe n-te Wurzel** von f auf D.

BEWEIS (1) Seien $a, z \in D$ und $\gamma_z, \tilde{\gamma}_z$ ssd Wege in D mit AP a und EP z. Dann ist $\Gamma := \gamma_z \oplus \tilde{\gamma}_z^-$ ein Zyklus in D und aus Satz 10.2 folgt $\int_\Gamma f \, \mathrm{d}z = 0$, also $\int_{\gamma_z} f \, \mathrm{d}z =$

$\int_{\tilde{\gamma}_z} f\,\mathrm{d}z$. Damit ist $F(z) := \int_{\gamma_z} f\,\mathrm{d}w$ wohldefiniert. Sei $z_0 \in D$, dann ex. ein $r > 0$, sodass $U_r(z_0) \subseteq D$. Sei $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Wie in Satz 6.3 sieht man:

$$
\begin{aligned}
F(z) - F(z_0) &= \int_{[z_0,z]} f\,\mathrm{d}w, \text{ also} \\
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f\,\mathrm{d}w \to f(z_0)\ (z \to z_0)
\end{aligned}
$$

und daraus folgt die Beh.
(2) Nach Vor. ist $\frac{f'}{f} \in H(D)$, also ex. nach (1) ein $F \in H(D)$, sodass $F' = \frac{f'}{f}$ auf D. Es gilt:

$$(fe^{-F})' = f'e^{-F} - fe^{-F}F' = f' - e^{-F} - fe^{-F}\frac{f}{f'} = 0$$

auf dem Gebiet D. Daher ex. ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $fe^{-F} = c$, d.h. $f = ce^F$ auf D. Wegen $Z(f) \neq 0$ ist $c \neq 0$ und es ex. ein $u \in \mathbb{C}$, sodass $c = e^u$. Wir erhalten $f = e^{F+u}$, wähle also $g := F + u \in H(D)$ für die Beh.
(3) Sei g wie in (2) und $h := e^{\frac{g}{n}}$, so ist $h^n = e^g = f$ auf D. q.e.d.

§ 11 Der Residuensatz

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

11.1 Lemma. Seien $m \in \mathbb{N}, a \in D$ und $f \in H(D \setminus \{a\})$. Dann gilt:
f hat in a einen Pol der Ordnung $m \Leftrightarrow \exists$ eindeutige $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C} : c_m \neq 0$ und $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ hat in a eine HS.

$Q(z) := \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ heißt der **Hauptteil** von f in a und $\operatorname{Res}(f, a) := c_1$ das **Residuum** von f in a.

BEWEIS O.b.d.A. sei $a = 0$. „$\Leftarrow$“: Nach Vor. ex. $\varphi \in H(D)$, sodass $f - Q = \varphi$ auf $D \setminus \{0\}$, also $z^m f(z) = z^m \varphi(z) + z^m Q(z) \to c_m \neq 0$ $(z \to 0)$. Lemma 7.8 liefert die Beh.
„$\Rightarrow$“: Nach Definition 7.4 ex. ein $g \in H(D)$, sodass $f(z) = \frac{g(z)}{z^m}$ $(z \in D \setminus \{0\})$ und $g(0) \neq 0$. Weiter ex. ein $r > 0$, sodass $U_r(0) \subseteq D$ und $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ $(z \in U_r(0))$. Wir erhalten

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{z^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z}}_{=: Q(z)} + \underbrace{a_m + a_{m+1} z + \dots}_{=: h(z)} \; (z \in \dot{U}_r(0)),$$

wobei $h \in H(U_r(0))$. Es gilt die Beh. mit $c_1 = a_{m-1}, \dots, c_m = a_0 = g(0) \neq 0$. q.e.d.

Beispiel. $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2}$ hat in $a = 2$ einen Pol der Ordnung 2. Wegen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^2}{(z-2)^2}\left(1 + \frac{z-2}{1!} + \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \frac{e^2}{(z-2)^2} + \frac{e^2}{z-1} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2(z-2)}{6} + \dots \end{aligned}$$

ist $Q(z) = \frac{e^2}{(z-2)^2} + \frac{e^2}{z-1}$ und $\operatorname{Res}(f, 2) = e^2$.

Definition. $f : D \to \mathbb{C}$ heißt auf D **meromorph** $:\Leftrightarrow \exists A \subseteq D : A$ ist in D diskret, $f \in H(D \setminus A)$ und jedes $a \in A$ ist ein Pol von f. In diesem Fall schreibe $f \in M(D)$.

Bemerkung. (1) In dieser Definition ist $A = \emptyset$ zugelassen, d.h. $H(D) \subseteq M(D)$.

(2) A ist höchstens abzählbar (siehe § 7).

(3) Sei $A = \{a\}, m, Q$ wie in Lemma 11.1 und Γ ein Zyklus in D, sodass $a \notin |\Gamma|$. Dann:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{c_1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \operatorname{Res}(f,a)n(\Gamma,a),$$

denn für $k \geqslant 2$ hat $z \mapsto \frac{c_k}{(z-a)^k}$ eine SF.

11.2 Satz (Residuensatz I)**.** Sei $f \in M(D)$, A die Menge der Pole von f in D, Γ ein Zyklus in $D \setminus A$, Γ nullhomolog in D und $B := \{a \in A : n(\Gamma,a) \neq 0\}$.
Dann ist B endlich und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f,a)n(\Gamma,a).$$

BEWEIS Annahme: B ist unendlich. Da $B \subseteq A$ und A abzählbar, ist auch B abzählbar, etwa $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_j \neq a_k$ $(j \neq k)$. Für jedes $a_k \in B$ ist nach Vor. $n(\Gamma, a_k) \neq 0$, also liegt nach Satz 5.4 kein a_k in der unbeschränkten ZK von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$. Daher ist (a_k) beschränkt und enthält nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. sei schon (a_k) konvergent und $b := \lim_{k\to\infty} a_k$. Dann ist b ein HP von A und da A diskret in D ist, muss $b \in \mathbb{C} \setminus D$ sein. Nach Vor. ist Γ nullhomolog in D, also $n(\Gamma, b) = 0$. Sei K die ZK von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ mit $b \in K$, dann ist K offen und $a_k \in K$ ffa $k \in \mathbb{N}$, also auch $n(\Gamma, a_k) = n(\Gamma, b) = 0$ ffa $k \in \mathbb{N}$. ↯ Widerspruch zu $a_k \in B$! Also ist B endlich.

Sei $D_0 := D \setminus (A \setminus B)$, dann ist D_0 offen und $\mathbb{C} \setminus D_0 = (\mathbb{C} \setminus D) \cup (A \setminus B)$. Sei $a \in D_0$. Falls $a \in \mathbb{C} \setminus D$, so ist $n(\Gamma, a) = 0$, denn Γ ist nullhomolog in D. Falls hingegen $a \in A \setminus B$, so ist $n(\Gamma, a) = 0$ nach Definition von B; also ist Γ auch nullhomolog in D_0.
Fall 1: $B = \emptyset$, also $D_0 = D \setminus A$. Dann ist $f \in H(D_0)$ und mit Satz 10.1 daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = 0 = \sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f,a)\underbrace{n(\Gamma,a)}_{=0}.$$

Fall 2: $B \neq \emptyset$, etwa $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $a_j \neq a_k$ $(j \neq k)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei Q_j der Hauptteil von f in a_j und $g := f - (Q_1 + \ldots + Q_n)$. Dann hat g nach Lemma 11.1 in $a_1, \ldots, a_n$ HS, kurz: $g \in H(D_0)$. Aus Fall 1 folgt $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g\,\mathrm{d}z = 0$, also mit Bemerkung (3)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_j\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_j)n(\Gamma,a_j)$$

und daraus die Beh. q.e.d.

Definition. Sei $f \in H(D)$ und $C \subseteq D$. Es bezeichne $N(f, C)$ die Anzahl der Nullstellen von f in C; dabei wird jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt.

Beispiel. Für $f(z) = (z+1)^3(z-2)^2(e^z-1)z^2$ $(z \in \mathbb{C})$ gilt:
$N(f,\mathbb{C}) = \infty, N(f,\mathbb{D}) = 3, N(f, U_2(0)) = 6.$

11.3 Satz (Argumentprinzip)**.** Sei D ein Gebiet, $f \in H(D), \gamma$ ein ssd geschlossener Weg in D mit $n(\gamma, a) \in \{0,1\}$ $(a \in D \setminus |\gamma|)$, γ nullhomolog in D, $f(z) \neq 0$ $(z \in |\gamma|)$ und $D_1 := \{a \in D : n(\gamma, a) = 1\}$. Dann gilt:

$$N(f, D_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z.$$

BEWEIS O.B.d.A. sei $A := Z(f) \neq \emptyset$. Sei $A_1 := A \cap D_1$, dann ist $N(f, A_1) = N(f, D_1)$. Da $f \neq 0$ auf D, ist A diskret in D nach Satz 7.1. Sei $\varphi := \frac{f'}{f} \in M(D), a \in A$ und $m(a)$ die Ordnung der Nullstelle a von f. Nach Satz 7.1 ex. ein $h \in H(D)$, sodass $f(z) = (z-a)^{m(a)} h(z)$ und $h(a) \neq 0$. Weiter ex. ein $r > 0$, sodass $\overline{U_r(a)} \subseteq D$ und $h(z) \neq 0$ $(z \in \overline{U_r(a)})$. Wegen

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(a)}{z-a} + \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{\in H(U_r(a))}$$

und Lemma 11.1 hat φ in a einen Pol der Ordnung 1 mit $\operatorname{Res}(\varphi, a) = m(a)$. Damit folgt aus Satz 11.2:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi \, \mathrm{d}z = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(\varphi, a) \underbrace{n(\Gamma, a)}_{\in \{0,1\}} \\
&= \sum_{a \in A_1} \underbrace{\operatorname{Res}(\varphi, a)}_{= m(a)} \underbrace{n(\Gamma, a)}_{= 1} = N(f, D_1). \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

11.4 Satz (Rouché)**.** Seien D, f, γ und D_1 wie in Satz 11.3 und $g \in H(D)$, sodass $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ $(z \in |\gamma|)$. Dann ist $N(f, D_1) = N(g, D_1)$.

BEWEIS Nach Vor. ist $f(z) \neq 0 \neq g(z)$ $(z \in |\gamma|)$. Sei $I = [0,1]$ das Parameterintervall von γ und $\gamma_0 := g \circ \gamma, \gamma_1 := f \circ \gamma$, so ist $|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |\gamma_1(t)|$ $(t \in I)$ nach Vor. und daher gilt für $\Gamma := \frac{\gamma_1}{\gamma_0} : |\Gamma| \subseteq U_1(1)$. Weiter liegt 0 in der unbeschränkten ZK von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$, also ist $n(\Gamma, 0) = 0$ nach Satz 5.4. Wegen $\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0}$ und Satz 11.3 folgt nun

$$\begin{aligned}
0 = n(\Gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} \, \mathrm{d}z = N(f, D_1) - N(g, D_1)
\end{aligned}$$

und daraus die Beh. q.e.d.

Beispiel. Bestimme $N(f, \mathbb{D})$ für $f(z) = 4z^9 - 2z^8 + 8z^6 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{i}{2}z^2$. Seien $\gamma(t) := e^{it}$

($t \in [0, 2\pi]$) und $g(z) := 8z^6$, so ist $D_1 = \mathbb{D}$ und

$$|f(z) - g(z)| = |4z^9 - 2z^8 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{i}{2}z^2| \leqslant 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7 < 8 = |g(z)| \ (z \in |\gamma|).$$

Aus Satz 11.4 folgt daher $N(f, \mathbb{D}) = N(g, \mathbb{D}) = 6$.

11.5 Satz (Hurwitz). Sei D ein Gebiet und (f_n) eine Folge in $H(D)$ mit $Z(f_n) = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$), sodass (f_n) auf D lokal glm gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Dann gilt $Z(f) = \emptyset$ oder $Z(f) = D$.

BEWEIS Sei $Z(f) \neq D$. Annahme: $\exists a \in D : f(a) = 0$. Nach Satz 7.1 ex. dann ein $r > 0$, sodass $\overline{U_r(a)} \subseteq D$ und $f(z) \neq 0$ ($z \in \overline{U_r(a)} \setminus \{a\}$), d.h. $\delta := \min\limits_{z \in \partial U_r(a)} |f(z)| > 0$. Sei $\gamma(t) := a + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), dann ist $D_1 = U_r(a)$ und nach Vor. ex. ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2}$ ($z \in \partial U_r(a)$). Es folgt $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2} < \delta \leqslant |f(z)|$ ($z \in |\gamma|$) und mit Satz 11.4 daher $1 \leqslant N(f, D_1) = N(f_n, D_1) = 0$ ↯ Widerspruch! q.e.d.

Definition. Sei $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. $A(r, R, z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.
Für $r = 0 : A(r, R, z_0) = \dot{U}_R(z_0)$.

Bemerkung. Sei für $\varrho \in (r, R) : \gamma_\varrho(t) := z_0 + \varrho e^{it}$ und seien $\varrho_1, \varrho_2 \in (r, R)$. Dann sind $\gamma_{\varrho_1}, \gamma_{\varrho_2}$ homolog in $A(r, R, z_0)$ und mit Satz 10.1(2) gilt daher $\int_{\gamma_{\varrho_1}} g \, \mathrm{d}w = \int_{\gamma_{\varrho_2}} g \, \mathrm{d}w$ für jedes $g \in H(A(r, R, z_0))$.

11.6 Satz. Sei $f \in H(A(r, R, z_0))$, so ex. eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit:

(1) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert lokal glm auf $U_R(z_0)$ und heißt der **Nebenteil** von f in z_0.

(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$ konvergiert lokal glm auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ und heißt der **Hauptteil** von f in z_0. $\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0.

(3) Für die **Laurentreihe** von f in z_0 gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \ (z \in A(r, R, z_0)).$$

Zusätzlich gilt für $\varrho \in (r, R)$: (wegen obiger Bemerkung unabhängig von ϱ)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Ohne BEWEIS.

11.7 Satz. Sei $z_0 \in D, f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und $R > 0$ so, dass $U_R(z_0) \subseteq D$. Weiter sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurentreihe von f in z_0. Dann gilt:

(1) z_0 ist eine HS von $f \Leftrightarrow a_{-n} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

(2) z_0 ist ein Pol der Ordnung m von $f \Leftrightarrow a_{-m} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ $(n > m)$.

(3) z_0 ist eine WS von $f \Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS (1) klar. (2) folgt aus Lemma 11.1. (3) folgt aus (1) und (2). q.e.d.

11.8 Folgerung. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und $g(z) := f(\frac{1}{z})$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dann gilt:
f ist ein Polynom $\Leftrightarrow g$ hat in $z_0 = 0$ keine WS.

BEWEIS $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{C})$, also ist

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \dots}_{\text{Hauptteil}} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Damit und mit Satz 11.7 folgt nun: f ist ein Polynom $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n = 0$ $(n > m) \Leftrightarrow z_0$ ist keine WS von g. q.e.d.

11.9 Satz (Residuensatz II)**.** Sei $A \subseteq D$ diskret in $D, f \in H(D \setminus A), \Gamma$ ein Zyklus in $D \setminus A$ und Γ nullhomolog in D. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) n(\Gamma, a).$$

BEWEIS Wie in Satz 11.2. q.e.d.

Bemerkung. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ injektiv. Sei weiter $g(z) := f(\frac{1}{z})$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, dann ist auch g injektiv. <u>Annahme:</u> g hat in $a = 0$ eine WS. Seien $V := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $W := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, so ist W offen und $\overline{g(V)} = \mathbb{C}$ nach Satz 7.6. Aus Satz 7.14 folgt: $g(W)$ ist offen. Sei $w_0 \in g(W) \subseteq \mathbb{C} = \overline{g(V)}$, dann ex. eine Folge (w_n) in $g(V)$, sodass $w_n \to w_0$ $(n \to \infty)$. Da $g(W)$ offen ist, gilt auch $w_n \in g(W)$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und damit $w_n \in g(V) \cap g(W)$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Aber es ist $V \cap W = \emptyset = g(V) \cap g(W)$, da g injektiv ist. ↯ Widerspruch! Also hat g in $a = 0$ keine WS. Aus Folgerung 11.8 folgt: f ist ein Polynom, also auch f'. Nach Satz 8.4 ist $Z(f') = \emptyset$, da f injektiv ist, und wegen Satz 7.12 ist f' konstant. Somit ex. $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, sodass $f(z) = az + b$ $(z \in \mathbb{C})$, insbesondere ist f bijektiv.

§ 12 Der Satz von Pringsheim

Definition. Seien $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in H(U_r(z_0))$ und $\alpha, \beta \in \partial U_r(z_0)$.

(1) β heißt ein **regulärer Punkt** (RP) von $f :\Leftrightarrow \exists r_1 > 0, g \in H(U_{r_1}(\beta)) : f = g$ auf $U_r(z_0) \cap U_{r_1}(\beta)$.

(2) α heißt ein **singulärer Punkt** (SP) von $f :\Leftrightarrow \alpha$ ist kein RP von f.

Beispiel. (1) $z_0 = 0, r = 1, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Sei $g(z) = \frac{1}{1-z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$, dann ist $f = g$ auf $U_1(0)$, d.h. jedes $\beta \in \partial U_1(0)$ mit $\beta \neq 1$ ist ein RP von f und $\alpha = 1$ ist ein SP von f.

(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ (Lückenreihe). Sei $\beta \in \partial\mathbb{D}$. <u>Annahme:</u> β ist ein RP von f. Dann ex. ein Bogen $\Gamma \subseteq \partial\mathbb{D}$, sodass $\beta \in \Gamma$ und jeder Punkt auf Γ RP von f ist. Sei $t \in [0,1]$ so, dass $\beta = e^{2\pi i t}$, wegen $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ex. dann $p, q \in \mathbb{N}_0, q \neq 0$ so, dass $z_* := e^{2\pi i \frac{p}{q}} \in \Gamma$ ein RP von f ist. Seien weiter $\varrho \in (0,1)$ und $z := \varrho z_*$, dann gilt

$$f(z) = f(\varrho z_*) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{n!} z_*^{n!} = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 2q$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}|f(\varrho z_*)| &\geqslant \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} \underbrace{|z|^{n!}}_{=\varrho^{n!}} \geqslant \sum_{n=q}^{m} \varrho^{n!} - \underbrace{\sum_{n=0}^{q-1} \varrho^{n!}}_{\leqslant q} \\ &\geqslant \sum_{n=q}^{m} \varrho^{m!} - q = \varrho^{m!}(m-q+1) - q.\end{aligned}$$

Da z_* RP von f ist, ex. der GW $L := \lim_{\varrho \to 1} |f(\varrho z_*)| \in \mathbb{R}$. Zugleich gilt aber

$$L \geqslant \lim_{\varrho \to 1} \varrho^{m!}(m-q+1) - q = m - q + 1 - q = m - 2q + 1,$$

also $L = \infty$, da $m > 2q$ beliebig gewählt war. ↯ Widerspruch! Also ist jeder Punkt auf $\partial\mathbb{D}$ SP von f.

Im Folgenden sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine PR mit KR $R = 1$.

12.1 Satz. f hat auf $\partial\mathbb{D}$ mindestens einen SP.

BEWEIS Annahme: Jeder Punkt auf $\partial\mathbb{D}$ ist ein RP von f. Dann ex. zu jedem $\beta \in \partial\mathbb{D}$ ein $r(\beta) > 0$ und $g_\beta \in H(U_{r(\beta)}(\beta))$ mit $f = g_\beta$ auf $\mathbb{D} \cap U_{r(\beta)}(\beta)$, es ist also $\partial\mathbb{D} \subseteq \bigcup_{\beta\in\partial\mathbb{D}} U_{r(\beta)}(\beta)$. Da $\partial\mathbb{D}$ kompakt ist, ex. nun $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \partial\mathbb{D}$, sodass $\bigcup_{j=1}^{n} U_{r(\beta_j)}(\beta_j)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ seien $D_j := U_{r(\beta_j)}(\beta_j)$ und $g_j := g_{\beta_j}$, dann ist $G := \mathbb{D} \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq G$ und daher ex. ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_{1+\varepsilon}(0) \subseteq G$. Nun sei $h : G \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{D}, \\ g_j(z), & z \in D_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

dann gilt für $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k$ mit $D_j \cap D_k \neq \emptyset$: Es ist $g_j = f = g_k$ auf $\mathbb{D} \cap D_j \cap D_k$, also nach Satz 7.2 auch $g_j = g_k$ auf $D_j \cap D_k$. Damit ist h wohldef. und $h \in H(G)$. Nach Satz 6.5 hat die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ von h um 0 einen KR $\geqslant 1 + \varepsilon$. Aber es ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} = b_n,$$

also hat auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen KR $\geqslant 1 + \varepsilon > 1$. ↯ Widerspruch zur Vor.! q.e.d.

12.2 Satz (Pringsheim)**.** Sind alle $a_n \geqslant 0$, so ist 1 ein SP von f.

BEWEIS Nach Satz 12.1 ex. ein SP $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ von f. Sei $\varrho \in (0, 1)$ und $z_1 := \varrho z_0$. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(z_1)| &= \left| \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\nu-1) a_n z_1^{n-\nu} \right| \\ &\leqslant \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\nu-1) a_n \varrho^{n-\nu} = f^{(\nu)}(\varrho) = |f^{(\nu)}(\varrho)| \end{aligned}$$

und daher auch

$$\alpha := \limsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{|f^{(\nu)}(z_1)|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}} \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{|f^{(\nu)}(\varrho)|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}} =: \beta.$$

Die Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_1)}{\nu!}(z - z_1)^\nu$ von f um z_1 hat den KR $1 - \varrho = \frac{1}{\alpha}$, da z_0 ein SP von f ist. Die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\varrho)}{\nu!}(z - \varrho)^\nu$ (*) von f um ϱ hat einen KR $\frac{1}{\beta} \geqslant 1 - \varrho$. Damit folgt $1 - \varrho \leqslant \frac{1}{\beta} \leqslant \frac{1}{\alpha} = 1 - \varrho$, also $\frac{1}{\beta} = 1 - \varrho$ und (*) hat für jedes $\varrho \in (0, 1)$ den KR $1 - \varrho$. Annahme: 1 ist ein RP von f. Dann ex. $r > 0$ und $g \in H(U_r(1))$, sodass $f = g$ auf $\mathbb{D} \cap U_r(1)$. Sei $G := \mathbb{D} \cup U_r(1)$ und wähle $w_0 \in \partial\mathbb{D}$ so, dass $|w_0 - 1| = r$. Wähle weiter $\varrho \in (0, 1)$ so, dass $|w_0 - \varrho| > 1 - \varrho$. Dann hat die größte offene Kreisscheibe um ϱ, die noch ganz in G liegt, den Radius $|w_0 - \varrho|$ und (*) daher für dieses ϱ den KR $|w_0 - \varrho| > 1 - \varrho$. ↯ Widerspruch! q.e.d.

Teil II: Differentialgleichungen

Alle folgenden Zitate von Sätzen, Definitionen etc. beziehen sich stets auf den zweiten Teil dieses Skriptums, nie auf den ersten Teil. Zitate von Gleichungen oder Gleichungssystemen erfolgen in runden Klammern, etwa (2.10).

Literaturhinweise:

- N. G. Markley: Principles of Differential Equations
- W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen
- D. Werner: Einführung in die höhere Analysis

§ 1 Äquivalente Normen und Matrizen

Ab sofort sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sowie V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (VR).
Auf dem $\mathbb{K}^n$ können zahlreiche Normen definiert werden, etwa für $p \in [1, \infty)$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p = 2$ ist dies die euklidische Norm, für $p = \infty$ die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Es ist

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p.$$

Wie in der Analysis III, § 16 sieht man: $\| \cdot \|_p$ ist eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.

Definition. Seien $\| \cdot \|_A$ und $\| \cdot \|_B$ Normen auf V. $\| \cdot \|_A, \| \cdot \|_B$ heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|v\|_A \leqslant \|v\|_B \leqslant c_2 \|v\|_A \ (v \in V).$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V.

1.1 Satz. Seien $\| \cdot \|_A, \| \cdot \|_B$ äquivalente Normen auf V, $A \subseteq V, v_0 \in V$ und (v_n) eine Folge in V. Dann gilt:

(1) $\|v_n - v_0\|_A \to 0 \Leftrightarrow \|v_n - v_0\|_B \to 0$ bzw. $v_n \xrightarrow{\|\cdot\|_A} v_0 \Leftrightarrow v_n \xrightarrow{\|\cdot\|_B} v_0$ $(n \to \infty)$.

(2) (v_n) ist eine Cauchyfolge (CF) in $(V, \| \cdot \|_A) \Leftrightarrow (v_n)$ ist eine CF in $(V, \| \cdot \|_B)$.

(3) $(V, \| \cdot \|_A)$ ist ein Banachraum (BR) $\Leftrightarrow (V, \| \cdot \|_B)$ ist ein BR.

(4) A ist offen in $(V, \| \cdot \|_A) \Leftrightarrow A$ ist offen in $(V, \| \cdot \|_B)$.
Dasselbe gilt für abgeschlossen, beschränkt und kompakt.

BEWEIS Folgt aus der Definition. q.e.d.

Beispiel. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I := [a, b], V := C(I, \mathbb{R})$ und $\|v\|_\infty := \max\{|v(t)| : t \in I\}$ $(v \in V)$. Dann ist Konvergenz in $(V, \| \cdot \|_\infty)$ genau die gleichmäßige Konvergenz auf I. Sei $\varphi \in V, \varphi > 0$ auf $I, \alpha := \min\{\varphi(t) : t \in I\}$ und $\beta := \|\varphi\|_\infty$. Dann gilt für $v \in V$:

$$\frac{1}{\beta}|v(t)| \leqslant \frac{|v(t)|}{\varphi(t)} \leqslant \frac{1}{\alpha}|v(t)| \ (t \in I),$$

also auch $\frac{1}{\beta}\|v\|_\infty \leqslant \left\|\frac{v}{\varphi}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\alpha}\|v\|_\infty$. Setze nun $\|v\| := \left\|\frac{v}{\varphi}\right\|_\infty$, dann sind $\|\cdot\|, \|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

1.2 Satz. Je zwei Normen $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

BEWEIS Es genügt zu zeigen: $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent.
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $|x_{k_0}| = \|x\|_\infty$. Dann gilt:

$$\|x\|_\infty = \left(|x_{k_0}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2.$$

Sei $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ die Basisdarstellung von x bzgl. der Einheitsvektoren $e_k \in \mathbb{K}^n$. Dann:

$$\begin{aligned}\|x\|_A &\leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e_k\|_A \leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|_A\right)}_{=:\,M} \cdot \max\{|x_k| : k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &= M\|x\|_\infty \leqslant M\|x\|_2.\end{aligned}$$

Definiere $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, f(x) := \|x\|_A$, so ist für $x, y \in \mathbb{K}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\|_A - \|y\|_A| \leqslant \|x - y\|_A \leqslant M\|x - y\|_2,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$. $K := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist kompakt in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, daher ex. $z_0 \in K$, sodass $f(z_0) \leqslant f(x)$ $(x \in K)$, d.h. $c := \|z_0\|_A \leqslant \|x\|_A$ $(x \in K)$. Es ist $c > 0$ und für $x \in K \setminus \{0\}$ ist $z := \frac{x}{\|x\|_2} \in K$. Insgesamt folgt

$$c \leqslant \|z\|_A = \frac{\|x\|_A}{\|x\|_2},$$

also $c\|x\|_2 \leqslant \|x\|_A$. q.e.d.

1.3 Folgerung. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$, so ist Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|$ gleichbedeutend mit koordinatenweiser Konvergenz.

1.4 Satz. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (NR). Dann gilt:
$\dim V < \infty \Leftrightarrow$ jede beschränkte Folge in V enthält eine konvergente Teilfolge.

BEWEIS In den Übungen. q.e.d.

1.5 Satz. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein NR und $\dim V < \infty$, so ist $(V, \|\cdot\|)$ ein BR.

BEWEIS Satz 1.4 und Analysis III. q.e.d.

Definition. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein NR, $A \subseteq V, v \in V, \varepsilon > 0$ und (v_n) eine Folge in V.

(1) $U_\varepsilon(v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| < \varepsilon\}, \dot{U}_\varepsilon(v_0) := U_\varepsilon(v_0) \setminus \{v_0\}$.

(2) $A^\circ := \{v \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(v) \subseteq A\}$ heißt das **Innere** von A.
Es gilt: $A^\circ \subseteq A, A^\circ$ ist offen sowie $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ist offen.

(3) $\overline{A} := \{v \in V : \exists (w_n) \text{ in } A : w_n \to v\}$ heißt der **Abschluss** von A.
Es gilt: $A \subseteq \overline{A}, \overline{A}$ ist abgeschlossen sowie $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen.

(4) Sei $s_n := v_1 + \ldots + v_n$ $(n \in \mathbb{N})$, so heißt (s_n) eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^\infty v_n$ bezeichnet.

(5) $\sum_{n=1}^\infty v_n$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow (s_n)$ ist konvergent.

(6) $\sum_{n=1}^\infty v_n$ heißt **absolut konvergent** $:\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty \|v_n\|$ ist konvergent.

1.6 Satz. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein BR und $\sum_{n=1}^\infty v_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty v_n$ konvergent und es gilt:

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty v_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|v_n\|.$$

BEWEIS Wie in Analysis I. q.e.d.

Definition. Bekannt: $\mathbb{K}^{n\times n} := \{(a_{jk}) : a_{jk} \in \mathbb{K}\}$ ist ein VR mit $\dim \mathbb{K}^{n\times n} = n^2 < \infty$, daher sind nach Satz 1.2 alle Normen auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ äquivalent. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **submultiplikativ** $:\Leftrightarrow \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ $(A, B \in \mathbb{K}^{n\times n})$.

Beispiel. Die Frobeniusnorm

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times n})$$

ist eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Im Folgenden sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

1.7 Satz. Seien $(A_n), (B_n)$ Folgen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sowie $\sum_{n=1}^\infty A_n$ und $\sum_{n=1}^\infty B_n$ absolut konvergent. Setze $C_n := \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, dann ist $\sum_{n=1}^\infty C_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^\infty C_n = \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^\infty B_n \right). \text{ (\textbf{Cauchyprodukt})}$$

BEWEIS Wie in Analysis I. q.e.d.

1.8 Satz. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:

(1) $\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}$ konvergiert absolut und man setzt $e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(2) Ist $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(3) e^A ist invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(4) Ist $\|\cdot\|$ submultiplikativ, so gilt: $\|e^{tA}\| \leqslant e^{|t|\cdot\|A\|}$ $(t \in \mathbb{K})$.

BEWEIS (1) Wegen Satz 1.2 sei $\|\cdot\|$ submultiplikativ. Dann ist $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$ und da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$ absolut konvergiert, folgt die Beh. aus dem Majorantenkriterium.
(2) Wie in Analysis I mit Satz 1.7.
(3) $I_n = e^0 = e^{A-A} \overset{(2)}{=} e^A \cdot e^{-A}$.
(4) Mit Satz 1.6:

$$\|e^{tA}\| \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right\| \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|t|\cdot\|A\|}. \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel. $(n = 2)$ Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt: $BA \neq AB, A^2 = B^2 = 0$, also $e^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e^B = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem ist $e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^{AB}$ und $e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$.

§ 2 Anfangswertprobleme

Im Folgenden sei stets der $\mathbb{R}^p$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen und $I, J, I_1, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Wir schreiben $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^p$.

Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$. f heißt auf D **lokal Lipschitz-stetig** (lLs) bzgl. $x :\Leftrightarrow \forall (t_0, x_0) \in D \; \exists \delta > 0, L > 0 \; \forall (t,x), (t, \bar{x}) \in D$:

$$t \in U_\delta(t_0) \text{ und } x, \bar{x} \in U_\delta(x_0) \Rightarrow \|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leqslant L\|x - \bar{x}\|.$$

Bekannt aus der Analysis II: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^p) \Rightarrow f$ ist lLs auf D bzgl. x.

2.1 Satz (Picard-Lindelöf)**.** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ offen, $(t_0, x_0) \in D, f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig und lLs auf D bzgl. x. Dann hat das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

eine eindeutige Lösung $x : J \to \mathbb{R}^p$ mit $t_0 \in J^\circ$. Die Eindeutigkeit bedeutet: Sind $x_1 : J_1 \to \mathbb{R}^p, x_2 : J_2 \to \mathbb{R}^p$ Lösungen von (2.1), so gilt $x_1 = x_2$ auf $J_1 \cap J_2$ ($\neq \emptyset$).

BEWEIS Bekannt aus der Analysis II. q.e.d.

Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, (t_0, x_0) \in D, f : D \to \mathbb{R}^p$ und $x : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

(1) x heißt **nach rechts** $\big[$**links**$\big]$ **nicht fortsetzbar** $:\Leftrightarrow$ Es gibt keine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^p$ des obigen AWP, sodass $I \cap [t_0, \infty) \subsetneq J \cap [t_0, \infty)$ $\Big[I \cap (-\infty, t_0] \subsetneq J \cap (-\infty, t_0]\Big]$ und $x = \tilde{x}$ auf $I \cap [t_0, \infty)$ $\Big[I \cap (-\infty, t_0]\Big]$.

(2) x heißt **nicht fortsetzbar** $:\Leftrightarrow x$ ist weder nach links noch nach rechts fortsetzbar.

(3) In der Situation von (2) schreibe $I = (\omega_-, \omega_+)$ für das **maximale Existenzintervall** I, wobei $\omega_- = -\infty$ oder $\omega_+ = \infty$ zugelassen ist.

(4) Ist $x : [t_0, t_+)$ $\Big[(t_-, t_0]\Big]$ $\to \mathbb{R}^p$ eine nach rechts $\big[$links$\big]$ nicht fortsetzbare Lösung des obigen AWP, so setze $\omega_+ := t_+$ $\Big[\omega_- := t_-\Big]$ für das maximale Existenzintervall nach rechts $\big[$links$\big]$ $[t_0, \omega_+)$ $\Big[(\omega_-, t_0]\Big]$.

Bemerkung. Unter den Vor. von Satz 2.1 hat das AWP (2.1) eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung $x : I \to \mathbb{R}^p$, wobei I offen ist.

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $h : [a, b) \to \mathbb{R}$.

$$\liminf_{t \to b} h(t) := \lim_{c \to 0+} \inf h((b - c, b)).$$

2.2 Satz. Seien die Vor. wie in Satz 2.1, $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des AWP (2.1) und $G_+ := \{(t, x(t)) : t \in [t_0, t_+)\} \subseteq D$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) x ist nach rechts nicht fortsetzbar, also $\omega_+ = t_+$.

(2) Es gibt keine kompakte Menge K, sodass $G_+ \subseteq K \subseteq D$.

(3) $t_+ = \infty$ oder $\|x(t)\| \to \infty$ $(t \to t_+)$ oder $\liminf_{t \to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.

BEWEIS Wir zeigen nur (1) $\Leftrightarrow$ (2), Äquivalenz zu (3) ohne Beweis.
(2) $\Rightarrow$ (1): Annahme: $\exists \delta > 0$ und eine Lösung $\tilde{x} : [t_0, t_+ + \delta) \to \mathbb{R}^p$ von (2.1), sodass $x = \tilde{x}$ auf $[t_0, t_+)$. Dann ist $K := \{(t, \tilde{x}(t)) : t \in [t_0, t_+]\}$ kompakt und $G_+ \subseteq K \subseteq D$ ↯ Widerspruch zu (2)!
(1) $\Rightarrow$ (2): Annahme: $\exists K$ kompakt, sodass $G_+ \subseteq K \subseteq D$. Dann ist $f(G_+) \subseteq f(K)$ und $f(K)$ kompakt, also $f(G_+)$ beschränkt. Daher ex. ein $c > 0$, sodass $\|x'(t)\| = \|f(t, x(t))\| \leqslant c$ $(t \in [t_0, t_+))$, d.h. x ist auf $[t_0, t_+)$ Lipschitz-stetig. Somit ex. der Grenzwert $\lim_{t \to t_+} x(t) =: z_0 \in \mathbb{R}^p$ und für $t \in [t_0, t_+)$ gilt:

$$\underbrace{(t, x(t))}_{\in G_+ \subseteq K} \to (t_+, z_0) \ (t \to t_+),$$

also auch $(t_+, z_0) \in K \subseteq D$. Sei nun $z : J \to \mathbb{R}^p$ die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z(t)) \\ z(t_+) &= z_0. \end{aligned}$$

Dann ist $t_+ \in J^\circ$ nach Satz 2.1 und z ist eine Fortsetzung von x nach rechts. ↯ Widerspruch zu (1)! q.e.d.

Bemerkung. Es gilt eine analoge Version von Satz 2.2 für nicht nach links fortsetzbare Lösungen $x : (t_-, t_0] \to \mathbb{R}^p$.

Beispiel. (1) Sei $D = \mathbb{R}^2, (t_0, x_0) = (0,0)$ und $f(t,x) = x+1$, also

$$\begin{aligned} x' &= x+1 \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL. ist $x(t) = ce^t - 1$; wegen $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 1$ löst $x(t) = e^t - 1$ $(t \in \mathbb{R})$ das AWP eindeutig und nicht fortsetzbar. Hier ist $\omega_+ = \infty, \omega_- = -\infty$.

(2) Die eindeutige Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x' &= x^2+1 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

ist $x(t) = \tan t$ (Trennung der Veränderlichen). Wegen $|x(t)| \to \infty$ $(t \to \pm\frac{\pi}{2})$ ist hier $\omega_+ = \frac{\pi}{2}, \omega_- = -\frac{\pi}{2}$ und $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(3) $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 < 1\}, f(t) = \sin\left(\frac{1}{1-t^2-x^2}\right)$. Es ist $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, also f lLs bzgl. x auf D. Daher existiert für das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

nach Satz 2.1 die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $x : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ und es ist $\omega_- < 0 < \omega_+$. <u>Annahme:</u> $\omega_+ > -\omega_-$. Sei $J := (-\omega_+, -\omega_-)$ und $z(t) := -x(-t)$ $(t \in J)$. Nachrechnen: $f(t,x) = f(-t,x) = f(t,-x) = f(-t,-x)$ $((t,x) \in D)$ und z löst das AWP auf J. Damit ist z eine Fortsetzung von x nach links. ↯ Widerspruch! Also ist $w_+ \leqslant -\omega_-$ und analog zeigt man $\omega_+ \geqslant -\omega_-$. Wir erhalten $\omega_+ = -\omega_-$.

Sei $I := (\omega_-, \omega_+)$. Es ist $|f| \leqslant 1$ auf D, daher gilt für $t, s \in I$:

$$|x(t) - x(s)| = |x'(\xi)(t-s)| = |f(\xi, x(\xi))| \cdot |t-s| \leqslant |t-s|$$

nach dem Mittelwertsatz (MWS) mit einer Stelle ξ zwischen t und s. Für $s = 0$ folgt $|x(t)| \leqslant |t|$ $(t \in I)$ (*); weiter ist x Lipschitz-stetig, es ex. also $\alpha := \lim\limits_{t \to \omega_+} x(t)$. Für alle $t \in I$ gilt:

$$(t, x(t)) \in D \Rightarrow t^2 + x(t)^2 < 1 \Rightarrow \omega_+^2 + \alpha^2 \leqslant 1 \ (t \to \omega_+).$$

<u>Annahme:</u> $\omega_+^2 + \alpha^2 < 1$, d.h. $(\omega_+, \alpha) \in D$. Sei $z : J \to \mathbb{R}$ die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z(t)) \\ z(\omega_+) &= \alpha, \end{aligned}$$

dann ist $\omega_+ \in J^\circ$ nach Satz 2.1, d.h. z ist eine Fortsetzung von x nach rechts. ↯ Widerspruch! Wir erhalten $\omega_+^2 + \alpha^2 = 1$ und damit für alle $t \in I$:

$$t^2 + x(t)^2 \overset{(*)}{\leqslant} 2t^2 \Rightarrow 1 = \omega_+^2 + \alpha^2 \leqslant 2\omega_+^2 \ (t \to \omega_+) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant w_+ = -\omega_-.$$

Insgesamt ist $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \subseteq (\omega_-, \omega_+)$.

2.3 Lemma (Grönwall)**.** Sei $b \in [0, +\infty], \varphi : [0, b) \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha, \beta \geqslant 0$ und $\psi(t) := \alpha + \beta \int_0^t \varphi \, \mathrm{d}s$ $(t \in [0, b))$. Dann gilt:

$$\varphi \leqslant \psi \text{ auf } [0, b) \Rightarrow \varphi(t) \leqslant \alpha e^{\beta t} \ (t \in [0, b)).$$

BEWEIS Sei $I := [0, b)$. Nach Vor. ist $\psi' = \beta\varphi \leqslant \beta\psi$ auf I. Sei $f(t) := e^{-\beta t}\psi(t)$ $(t \in I)$, dann ist

$$f'(t) = -\beta e^{-\beta t}\psi(t) + e^{-\beta t}\psi'(t) = e^{-\beta t}(\psi'(t) - \beta\psi(t)) \leqslant 0 \ (t \in I).$$

Also ist f fallend auf I, d.h. $f(t) \leqslant f(0) = \psi(0) = \alpha$ $(t \in I)$. Es folgt $\varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \alpha e^{\beta t}$ $(t \in I)$. q.e.d.

2.4 Satz. Sei $D = (a, b) \times \mathbb{R}^p, f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig und lLs auf D bzgl. x. Weiter seien $\alpha, \beta \geqslant 0$, sodass $\|f(t, x)\| \leqslant \alpha + \beta\|x\|$ $((t, x) \in D)$. Dann ist das AWP (2.1) auf (a, b) eindeutig lösbar, d.h. $\omega_+ = b, \omega_- = a$.

BEWEIS Nur für $\omega_+ = b$ ($\omega_- = a$ analog). Annahme: $\omega_+ < b$, insbesondere $\omega_+ < \infty$. Sei $I := [t_0, \omega_+)$ und $x : I \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung von (2.1). O.B.d.A. sei $t_0 = 0$, also $I = [0, \omega_+)$. Es ist $x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, \mathrm{d}s$ $(t \in I)$, daher gilt mit der Vor.

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant \|x_0\| + \left\| \int_0^t f(s, x(s)) \, \mathrm{d}s \right\| \leqslant \|x_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s))\| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant \|x_0\| + \int_0^t (\alpha + \beta\|x(s)\|) \, \mathrm{d}s = \|x_0\| + \alpha t + \beta \int_0^t \|x(s)\| \, \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

wobei $\alpha t \leqslant \alpha\omega_+$. Mit $\varphi(t) := \|x(t)\|$ und $\alpha' := \|x_0\| + \alpha\omega_+$ folgt nun aus Lemma 2.3:

$$\|x(t)\| \leqslant \alpha' e^{\beta t} \leqslant \alpha' e^{\beta\omega_+} =: R \ (t \in I).$$

Damit ist

$$G_+ = \{(t, x(t)) : t \in I\} \subseteq \underbrace{[0, \omega_+] \times \overline{U_R(0)}}_{\text{kompakt}} \subseteq (a, b) \times \mathbb{R}^p,$$

ein Widerspruch zu Satz 2.2! ↯ q.e.d.

Explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung

sowie deren Überführung in Systeme 1. Ordnung. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kp}$ und $g : D \to \mathbb{R}^p$. Eine **explizite DGL. der Ordnung** k hat die Form

$$x^{(k)}(t) = g(t, x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) \tag{2.2}$$

Definiere $f : D \to \mathbb{R}^{kp}$ durch $f(t,z) = (z_2, \ldots, z_k, g(t,z))$ für $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^{kp}$ mit $z_j \in \mathbb{R}^p$ $(j \in \{1, \ldots, k\})$ und betrachte die DGL.

$$z'(t) = f(t, z(t)) \tag{2.3}$$

2.5 Satz. (1) Ist $x : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von (2.2) und $z : I \to \mathbb{R}^{kp}$ definiert durch $z(t) := (x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$, so ist z eine Lösung von (2.3) auf I.

(2) Ist $z : I \to \mathbb{R}^{kp}$ eine Lösung von (2.3) und $z = (z_1, \ldots, z_k)$ $(z_j \in \mathbb{R}^p)$, so ist z_1 eine Lösung von (2.2) auf I.

BEWEIS Nachrechnen oder Analysis II. q.e.d.

Autonome Differentialgleichungen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \times\mathbb{R}^p$ und $g : D \to \mathbb{R}^p$. Dann heißt

$$x'(t) = g(x(t)) \tag{2.4}$$

eine **autonome DGL.**
Dabei heißt g auf D **lokal Lipschitz-stetig** (lLs) $:\Leftrightarrow \forall x_0 \in D$ ex. eine Umgebung U von x_0, sodass $g|_{U \cap D}$ Lipschitz-stetig auf $U \cap D$ ist. In diesem Fall ist $f(t,x) := g(x)$ $((t,x) \in \mathbb{R} \times D)$ lLs auf D bzgl. x und alle bisherigen Sätze sind daher auf autonome DGL. anwendbar.

2.6 Satz. Ist $x_0 \in D$ und $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) := x_0$ $(t \in \mathbb{R})$ eine Lösung von (2.4).

BEWEIS Klar. q.e.d.

Definition. Sei $x_0 \in D$ und $g(x_0) = 0$. Dann heißt x_0 eine **stationäre Stelle** von (2.4).

2.7 Satz. Sei $g : D \to \mathbb{R}^p$ stetig, $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von (2.4) und es ex. $x_0 := \lim\limits_{t \to \infty} x(t) \in D$. Dann ist x_0 eine stationäre Stelle von (2.4) und $x'(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

BEWEIS Sei $g = (g_1, \ldots, g_p), x = (x_1, \ldots, x_p)$ und $g(x_0) =: a = (a_1, \ldots, a_p)$, so ist nach Vor. $x_j'(t) = g_j(x(t))$. <u>Annahme:</u> $a \neq 0$, o.B.d.A. $a_1 > 0$. g ist stetig, daher gilt

$g_1(x(t)) \to a_1 > 0$ $(t \to \infty)$, d.h. es ex. ein $t_1 > t_0$, sodass $g_1(x(t)) \geqslant \frac{a_1}{2}$ $(t > t_1)$. Nach dem MWS gilt $x_1(t) - x_1(t_1) = x_1'(\xi)(t - t_1)$ mit einem $\xi \in (t_1, t)$ und wir erhalten für $t > t_1$:

$$x_1(t) = x_1(t_1) + g(x(\xi))(t - t_1) \geqslant x_1(t_1) + \frac{a_1}{2}(t - t_1),$$

also $x_1(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$. ↯ Widerspruch! q.e.d.

2.8 Satz. $(p = 1)$ Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : D \to \mathbb{R}$ stetig und $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.4). Dann ist x monoton.

BEWEIS In den Übungen. q.e.d.

2.9 Beispiel (Newtonsche Bewegungsgleichung)**.** Ein Massepunkt m bewege sich in einem Kraftfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$mx''(t) = F(x(t), x'(t)).$$

Mithilfe von Satz 2.5 kann dies in ein System 1. Ordnung überführt werden:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x''(t) = \frac{1}{m} F(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Mit $z := (x, y)$ und $g(z) = g(x, y) := (y, \frac{1}{m} F(x, y))$ erhält man daraus die autonome DGL.

$$z'(t) = g(z(t)).$$

2.10 Beispiel (Harmonischer Oszillator)**.** Ein Massepunkt m schwinge an einer Feder um seine Ruhelage mit der Frequenz ω, die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$mx''(t) = -Dx(t) \tag{2.5}$$

mit der Federkonstanten $D := m\omega^2$, also $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.
Analysis II: Ein Fundamentalsystem (FS) von (2.5) ist gegeben durch $\sin(\omega t), \cos(\omega t)$, die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zu einer Ausgangslage x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 wird noch das AWP

$$\begin{aligned} x''(t) + \omega^2 x(t) &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

betrachtet, dessen Lösung ist eindeutig bestimmt. Das zu (2.5) gehörige System 1. Ordnung lautet

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x''(t) = -\omega^2 x(t). \end{aligned}$$

Definiere $z := (x, y)$ und $g(z) = g(x, y) := (y, -\omega^2 x)$, so ist die zugehörige (autonome) DGL.

$$z'(t) = g(z(t)).$$

§ 3 Autonome Differentialgleichungen

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ lLs und $I, J, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle.

Definition. Wir betrachten die autonome DGL.

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{3.1}$$

Ist $x : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von (3.1), so heißt $x(I) \subseteq \mathbb{R}^p$ eine **Bahn**, ein **Orbit** oder eine **Trajektorie** von (3.1).

Beispiel. Wir betrachten Beispiel 2.10 mit $\omega = 1$, also $(x_1', x_2') = (x_2, -x_1)$. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Sei $x := (x_1, x_2)$, dann ist

$$\|x(t)\|_2^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) = \alpha^2 + \beta^2.$$

Bahnen sind also genau die Kreise um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Definition. Sei $H \in C^1(D, \mathbb{R})$.
H heißt ein **erstes Integral** von (3.1) $:\Leftrightarrow H'(x) \cdot f(x) = 0$ $(x \in D)$.

3.1 Satz. Sei $H \in C^1(D, \mathbb{R})$ ein erstes Integral von (3.1) und $x : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von (3.1). Dann ex. ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$H(x(t)) = c \ (t \in I).$$

BEWEIS Für $t \in I$ definiere $g(t) := H(x(t))$, dann ist

$$g'(t) = H'(x(t)) \cdot x'(t) = H'(x(t)) \cdot f(x(t)) = 0$$

nach Vor., da $x(t) \in D$. Also ist g auf I konstant. q.e.d.

Beispiel. $p = 2, D = \mathbb{R}^2, f = (g, h)$ und g, h stetig db auf $\mathbb{R}^2$. Wir suchen ein erstes Integral und machen dazu den Ansatz

$$H'(x, y) = \lambda(x, y)(-h(x, y), g(x, y)) \tag{3.2}$$

mit $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Gesucht ist also eine SF von $(-\lambda h, \lambda g)$ auf $\mathbb{R}^2$. Nach Analysis II existiert diese genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung (IB) $(-\lambda h)_y = (\lambda g)_x$ erfüllt ist, also

$$-\lambda_y h - \lambda h_y = \lambda_x g + \lambda g_x.$$

Dies ist eine partielle DGL. und nur schwierig zu lösen. Oft helfen Ansätze der Form $\lambda(x,y) = \lambda(x), \lambda(y)$ oder $\lambda(xy), \dots$

Beispiel. (1) Wir betrachten Beispiel 2.9 mit $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, also $mx''(t) = F(x(t))$. Das zugehörige autonome System lautet

$$(x'(t), y'(t)) = (y(t), \frac{1}{m} F(x(t)). \tag{3.3}$$

Mit den obigen Bezeichnungen $f = (g,h)$ ist also $g(x,y) = y, h(x,y) = \frac{1}{m}F(x)$ und die IB lautet $(-\lambda \frac{1}{m} F)_y = (\lambda y)_x$. Dies wird von jeder Konstante λ erfüllt, wir wählen $\lambda = m$. Nach (3.2) ist dann $H'(x,y) = m(-\frac{1}{m}F(x), y) = (-F(x), my)$, ein erstes Integral von (3.3) ist also $H(x,y) = \frac{m}{2}y^2 + V(x)$ mit $V(x) := -\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$. Sei $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (3.3), so ist $\frac{m}{2}y(t)^2$ die kinetische Energie und $V(x(t))$ die potentielle Energie des Massepunktes zur Zeit t. Aus Satz 3.1 folgt: Es ex. ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$H(x(t), y(t)) = \frac{m}{2} y(t)^2 + V(x(t)) = c \ (t \in I).$$

Das ist der Energieerhaltungssatz.

(2) Sei $D = (0,\infty)^2, f(x,y) = (x - xy, xy - y), \tilde{D} := \{(t,(x,y)) : t \in \mathbb{R}, (x,y) \in D\} = \mathbb{R} \times D$ und $\tilde{f}(t,(x,y)) := f(x,y)\ ((t,(x,y)) \in \tilde{D})$. Wir betrachten die DGL.

$$(x'(t), y'(t)) = f(x(t), y(t)) = \tilde{f}(t, (x(t), y(t))). \tag{3.4}$$

Nachrechnen: Der Ansatz $\lambda(x,y) = \alpha(xy)$ führt auf $\lambda(xy) = -\frac{1}{xy}$, also $H'(x,y) = (1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y})$. Damit ist ein erstes Integral von (3.4) etwa $H(x,y) = x - \log x + y - \log y$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in D$, wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) &= f(x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) &= (x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Es ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, f also lLs auf D, nach Satz 2.1 ist (3.5) eindeutig lösbar; sei $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ diese eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung und $I = (\omega_-, \omega_+)$. Da (x,y) Lösung von (3.4) ist, ist $(x(t), y(t)) \in D\ (t \in I)$, also $x(t), y(t) > 0\ (t \in I)$. Sei $c := H(x_0, y_0) = H(x(t_0), y(t_0))$, dann ist

$$H(x(t), y(t)) = x(t) - \log x(t) + y(t) - \log y(t) = c \ (t \in I)$$

nach Satz 3.1. Sei weiter $N_c := \{(x,y) \in D : H(x,y) = c\} \subseteq D$, dann ist

$(x(t), y(t)) \in N_c$ $(t \in I)$ und wegen $x - \log x \to \infty$ $(x \to \infty)$ ist N_c beschränkt. Sei $((u_n, v_n))$ eine konvergente Folge in N_c mit Grenzwert (u_0, v_0), d.h. $u_n \to u_0, v_n \to v_0$ $(n \to \infty)$. Wegen $u_n, v_n > 0$ ist $u_0, v_0 \geqslant 0$ und wegen $(u_n, v_n) \in N_c$ ist $a_n := u_n - \log u_n + v_n - \log v_n = c$ $(n \in \mathbb{N})$. Wäre nun $u_0 = 0$ oder $v_0 = 0$, so würde auch $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ gelten. ↯ Also ist $(u_0, v_0) \in D$. H ist stetig, daher ist auch $(u_0, v_0) \in N_c$ und damit ist N_c abgeschlossen, insgesamt also kompakt.
<u>Annahme:</u> $\omega_+ < \infty$. Dann:

$$G_+ = \{(t, (x(t), y(t))) : t \in [t_0, \omega_+)\} \subseteq \underbrace{[t_0, \omega_+] \times N_c}_{\text{kompakt}} \subseteq \mathbb{R} \times D = \tilde{D}.$$

↯ Dies ist ein Widerspruch zu Satz 2.2!
Also ist $\omega_+ = \infty$; analog sieht man $\omega_- = -\infty$, d.h. $I = \mathbb{R}$.

§ 4 Stabilität

Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $X(t) := e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ $(t \in \mathbb{R})$. Aus den Übungen ist bekannt: $X'(t) = Ae^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$. Sind $x_1(t), \dots, x_p(t)$ die Spalten von $X(t)$, so ist also $x_j'(t) = Ax_j(t)$ $(j \in \{1, \dots, p\})$, d.h. $x_1, \dots, x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ sind die Lösungen des linearen Systems $x' = Ax$. Da $X(t)$ invertierbar ist, $x_1, \dots, x_p$ ein FS von $x' = Ax$.

In diesem Paragraphen sei stets $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^p, \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^p$ auf D lLs. Zu $t_0 \in R$ und $x_0 \in D$ betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bemerkung. (1) (4.1) ist eindeutig lösbar nach Satz 2.1.

(2) Ist $f(x_0) = 0$, so ist $x(t) := x_0$ $(t \in \mathbb{R})$ die Lösung von (4.1) nach Satz 2.6.

(3) Eine stationäre Stelle von $x' = f(x)$ heißt auch **Gleichgewichtspunkt** oder **Äquilibrium**.

Definition. Sei x_0 eine stationäre Stelle von $x' = f(x)$, also $f(x_0) = 0$.

(1) x_0 heißt **stabil** $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1 \in D$: Ist $\|x_1 - x_0\| < \delta$, so gilt für die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung $x : [t_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ des AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_1, \end{aligned}$$

dass $\omega_+ = \infty$ und $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ $(t \geqslant t_0)$.

(2) x_0 heißt **asymptotisch stabil**, falls in (1) zusätzlich gilt: $x(t) \to x_0$ $(t \to \infty)$.

(3) x_0 heißt **instabil** $:\Leftrightarrow x_0$ ist nicht stabil.

Bemerkung. (1) Aus asymptotisch stabil folgt stabil.

(2) Diese Definitionen sind unabhängig von der Norm auf $\mathbb{R}^p$. (klar)

(3) Diese Definitionen sind auch unabhängig von t_0.

BEWEIS Sei x_0 stabil bzgl. t_0, o.B.d.A. $t_0 = 0$. Sei weiter $t_1 \neq t_0 = 0$, etwa $t_1 > 0$, und $\varepsilon > 0, \delta > 0$ wie in obiger Definition. Sei $x_1 \in D, \|x_1 - x_0\| < \delta$ und $z : [t_1, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des AWP

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(z(t)) \\ z(t_1) &= x_1. \end{aligned}$$

Dann ist $x : [0, \omega_+ - t_1) \to \mathbb{R}^p, x(t) := z(t + t_1)$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_1. \end{aligned}$$

x_0 ist stabil bzgl. 0, also ist $\omega_+ - t_1 = \infty \Rightarrow \omega_+ = \infty$. Weiter ist $\|x'(t) - x_0\| < \varepsilon$ für $t \geqslant 0$ und damit

$$\|z(t) - x_0\| = \|x(t - t_1) - x_0\| < \varepsilon \ (t \geqslant t_1),$$

d.h. x_0 ist stabil bzgl. t_1. q.e.d.

4.1 Lemma. Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $c \in \mathbb{R}$; weiter gelte $\mathfrak{Re}\,\lambda < c$ für jeden Eigenwert (EW) λ von A. Dann existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^p$, sodass $\langle x | Ax \rangle \leqslant c\|x\|_0^2$ $(x \in \mathbb{R}^p)$; dabei ist $\|\cdot\|_0$ die von $\langle \cdot | \cdot \rangle$ induzierte Norm $\|x\|_0^2 = \langle x | x \rangle$.

BEWEIS Sei $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist EW von } A\}$ (**Punktspektrum**) und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^p$, es induziert die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 =: \|\cdot\|$. O.b.d.A. sei $c = 0$, sonst betrachte $A + cI_p$. Sei $J = D + N$ die Jordan-Normalform von A, dann ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ mit $\lambda_j \in \sigma_p(A), \mathfrak{Re}\,\lambda_j < 0$ sowie $N^p = 0$ und $DN = ND$, und sei $T \in \mathbb{C}^{p \times p}$ die zugehörige Transformationsmatrix, also $A = T^{-1}JT$. Induktiv sieht man: $A^k = T^{-1}A^kT$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_p})$ und $|e^{t\lambda_j}| = e^{t\mathfrak{Re}\,\lambda_j} \to 0$, also auch $e^{tD} \to 0$ $(t \to \infty)$. Weiter ist $e^{tN} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!}$ mit $e^{tD}\frac{t^k N^k}{k!} \to 0$ und daher $e^{tD}e^{tN} \to 0$ $(t \to \infty)$. Wir erhalten

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tJ}T = T^{-1}e^{t(D+N)}T = T^{-1}e^{tD}e^{tN}T \to 0 \ (t \to \infty).$$

Nach Vor. ex. nun ein $\varepsilon > 0$, sodass auch $\mathfrak{Re}\,\mu < 0$ $(\mu \in \sigma_p(A + \varepsilon I_p))$, und man sieht daher wie oben, dass auch $e^{t(A+\varepsilon I_p)} = e^{t\varepsilon}e^{tA} \to 0$ $(t \to \infty)$. Für $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sei $\|B\|_1 := \max\{\|Bx\| : \|x\| = 1\}$, dann ist $\|\cdot\|_1$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{R}^{p \times p}$ und $\|Bx\| \leqslant \|B\|_1\|x\|$ $(x \in \mathbb{R}^p)$ (Übung!). Damit folgt: Es ex. ein $M > 0$, sodass $e^{t\varepsilon}\|e^{tA}\|_1 \leqslant M$ $(t \geqslant 0)$, d.h.

$$\|e^{tA}\|_1 \leqslant Me^{-t\varepsilon} \ (t \geqslant 0).$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^p$. Dann ist

$$|(e^{tA}x|e^{tA}y)| \leqslant \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\| \leqslant \|e^{tA}\|_1^2\|x\|\|y\| \leqslant Me^{-2t\varepsilon}\|x\|\|y\|,$$

d.h. das Integral $\langle x|y\rangle := \int_0^\infty (e^{tA}x|e^{tA}y)\,\mathrm{d}t$ konvergiert absolut. Übung: $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^p$. Für $x \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$\begin{aligned}\|e^{tA}x\|_0^2 = \langle e^{tA}x|e^{tA}x\rangle &= \int_0^\infty (e^{sA}e^{tA}x|e^{sA}e^{tA}x)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty (e^{(s+t)A}x|e^{(s+t)A}x)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_t^\infty (e^{sA}x|e^{sA}x)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^\infty (e^{sA}x|e^{sA}x)\,\mathrm{d}s = \langle x|x\rangle = \|x\|_0^2.\end{aligned}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^p$ und $u(t) := e^{tA}x, h(t) := \|u(t)\|_0^2$ für $t \geqslant 0$. Dann ist $u'(t) = Ae^{tA}x, h'(t) = 2\langle u(t)|u'(t)\rangle$ und $h(t) = \|e^{tA}x\|_0^2 \leqslant \|x\|_0^2 = h(0)$. Also ist auch $\frac{h(t)-h(0)}{t-0} \leqslant 0$ $(t > 0) \Rightarrow h'(0) \leqslant 0$. Das bedeutet aber gerade

$$0 \geqslant h'(0) = 2\langle u(0)|u'(0)\rangle = 2\langle x|Ax\rangle. \quad \text{q.e.d.}$$

4.2 Satz (Stabilitätssatz)**.** Sei $f(x_0) = 0$ und f db in x_0.
Ist $\mathfrak{Re}\,\lambda < 0$ für jeden EW λ von $f'(x_0)$, so ist x_0 asymptotisch stabil.

BEWEIS O.B.d.A. sei $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$, insbesondere $0 \in D$. Sei $A := f'(0)$, dann ex. ein $c > 0$, sodass $\mathfrak{Re}\,\lambda < -c$ $(\lambda \in \sigma_p(A))$. Sei $\langle\cdot|\cdot\rangle$ wie in Lemma 4.1 und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_0$. Nach Vor. ist f db in 0 und $f(0) = 0$, also gilt $\frac{\|f(x)-Ax\|}{\|x\|} \to 0$ $(x \to 0)$. Für $x \in D \setminus \{0\}$:

$$\frac{|\langle x|f(x)-Ax\rangle|}{\|x\|^2} \leqslant \frac{\|x\|\|f(x)-Ax\|}{\|x\|^2} \to 0 \ (x \to 0),$$

also ex. ein $r > 0$, sodass $U := \overline{U_r(0)} \subseteq D$ und $\frac{|\langle x|f(x)-Ax\rangle|}{\|x\|^2} \leqslant \frac{c}{2}$ $(x \in U \setminus \{0\})$. Damit ist

$$\frac{\langle x|f(x)\rangle}{\|x\|^2} \leqslant \frac{c}{2} + \frac{\langle x|Ax\rangle}{\|x\|^2} \leqslant \frac{c}{2} - c = -\frac{c}{2},$$

d.h. $\langle x|f(x)\rangle \leqslant -\frac{c}{2}\|x\|^2$ $(x \in U)$. Nun sei $x_1 \in D, \|x_1\| < r$ und $x : [0,\omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_1, \end{aligned}$$

dann ist $\|x(0)\| = \|x_1\| < r$. <u>Annahme:</u> $\exists s \in (0,\omega_+) : \|x(s)\| \geqslant r$. Sei $s_0 := \inf\{s \in (0,\omega_+) : \|x(s)\| \geqslant r\}$, dann ist $\|x(s_0)\| \geqslant r, s_0 \in (0,\omega_+)$ und $\|x(t)\| < r$ $(t \in I := [0,s_0))$. Sei weiter $h(t) := \langle x(t)|x(t)\rangle$ und $\varphi(t) := e^{ct}h(t)$ für $t \in I$, dann ist

$$h'(t) = 2\langle x(t)|x'(t)\rangle = \langle x(t)|f(x(t))\rangle \leqslant -c\|x(t)\|^2 = -ch(t).$$

und daher

$$\varphi'(t) = ce^{ct}h(t) + e^{ct}h'(t) = e^{ct}(h'(t) + ch(t) \leqslant 0,$$

d.h. φ ist auf I fallend. Wir erhalten damit

$$\|x(t)\|^2 = h(t) = e^{-ct}\varphi(t) \leqslant e^{-ct}\varphi(0) = e^{-ct}h(0) = e^{-ct}\|x_1\|^2 \leqslant \|x_1\|^2,$$

also $\|x(t)\| \leqslant e^{-ct/2}\|x_1\| \leqslant \|x_1\| < r$. Mit $t \to s_0-$ folgt: $\|x(s_0)\| \leqslant \|x_1\| < r$ ↯ Widerspruch! Also ist $\|x(t)\| < r$ $(t \in [0, \omega_+))$. Annahme: $\omega_+ < \infty$. Dann ist

$$G_+ = \{(t, x(t)) : t \in [0, \omega_+)\} \subseteq \underbrace{[0, \omega_+] \times U}_{\text{kompakt}} \subseteq D$$

↯ Widerspruch zu Satz 2.2! Also $\omega_+ = \infty$. Die obige Rechnung zeigt auch: $\|x(t)\| \leqslant e^{-ct/2}\|x_1\| < r$ $(t \geqslant 0)$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, r\}$. Wie oben sieht man dann für $x_1 \in D$ mit $\|x_1\| < \delta < r$:

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t)\| \leqslant e^{-ct/2}\|x_1\| \leqslant \|x_1\| < \delta < \varepsilon \ (t \geqslant 0),$$

d.h. x_0 ist stabil. Wegen $\|x(t) - x_0\| \leqslant e^{-ct/2}\|x_1\| \to 0$ $(t \to \infty)$ ist x_0 auch asymptotisch stabil. q.e.d.

Beispiel. (1) (Lineare Systeme) Sei $D = \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $f(x) = Ax$, also die DGL. $x'(t) = f(x(t)) = Ax(t)$ gegeben; es ist $f'(x) = A$ $(x \in \mathbb{R}^p)$. Sei weiter $\mathfrak{Re}\,\lambda < 0$ $(\lambda \in \sigma_p(A))$, dann ist $0 \notin \sigma_p(A)$ und daher A regulär. Also gilt $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$, d.h. $x_0 = 0$ ist die einzige stationäre Stelle von $x' = Ax$. Nach Satz 4.2 ist $x_0 = 0$ asymptotisch stabil.

(2) (Mathematisches Pendel mit Dämpfung)
Der Auslenkungswinkel eines Fadenpendels $\varphi(t)$ zur Zeit t genügt der DGL.

$$\varphi''(t) = -\alpha\varphi'(t) - \omega^2 \sin\varphi(t)$$

mit $\alpha, \omega > 0$. Das zugehörige autonome System lautet

$$(x'(t), y'(t)) = (y(t), -\alpha y(t) - \omega^2 \sin x(t)), \tag{4.2}$$

also $f(x, y) = (y, -\alpha y - \omega^2 \sin x)$ und $D = \mathbb{R}^2$. Sei $x_0 = (0, 0)$, dann ist $f(x_0) = (0, 0)$, d.h. x_0 ist stationäre Stelle von (4.2). Weiter ist

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A := f'(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

und daher $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2}$. Fall 1: $\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2 < 0$. Dann ist $\mathfrak{Re}\,\lambda = -\frac{\alpha}{2} < 0$ $(\lambda \in \sigma_p(A))$. Fall 2: $\frac{\alpha^2}{4} - \omega^2 \geqslant 0$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$ $(\lambda \in \sigma_p(A))$. Nach Satz 4.2 ist daher $x_0 = (0, 0)$ asymptotisch stabil.

4.3 Satz. Sei $f(x_0) = 0, f$ db in x_0 und es gebe mindenstens einen EW λ von $f'(x_0)$ mit $\mathfrak{Re}\,\lambda > 0$, für alle anderen gelte $\mathfrak{Re}\,\lambda < 0$. Dann ist x_0 instabil.

BEWEIS nur für lineare Systeme, also $D = \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $f(x) = Ax, f'(x) = A$ $(x \in \mathbb{R}^p)$; wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$. Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ ein EW von $A = f'(x_0)$ mit $\beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ und sei $w = u + iv \in \mathbb{C}^p$ mit $u, v \in \mathbb{R}^p$ ein zugehöriger Eigenvektor (EV) von A so, dass $u \neq 0$. Sei $\mu > 0$ und $x(t) := \mu \mathfrak{Re}\,(e^{\lambda t} w)$, dann löst nach Analysis II x das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= \mu u. \end{aligned}$$

Fall 1: $\beta = 0$. Dann ist $w = u \in \mathbb{R}^p$, also $v = 0$ und daher $x(t) = \mu e^{\alpha t} u$; wegen $\alpha > 0$ folgt

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t)\| = \mu e^{\alpha t}\|u\| \to 0 \ (t \to \infty).$$

Fall 2: $\beta \neq 0$. Sei $t_n := \frac{2\pi n}{|\beta|}$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und

$$e^{\lambda t_n} w = e^{\alpha t_n} e^{i\beta t_n} w = e^{\alpha t_n} \underbrace{e^{i\frac{\beta}{|\beta|}2\pi n}}_{=1} w = e^{\alpha t_n} w.$$

Also ist $x(t) = \mu e^{\alpha t_n} u$ und daher

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t)\| = \mu e^{\alpha t_n}\|u\| \to \infty \ (n \to \infty).$$

Annahme: x_0 ist stabil. Dann ex. zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, dass für $\|\mu u\| = \mu\|u\| < \delta$ gilt: $\|x(t) - x_0\| < 1$ $(t \geqslant 0)$. Wähle μ genügend klein, so ist dies ein Widerspruch! $\lightning$ q.e.d.

Beispiel. Zu $\mathfrak{Re}\,\lambda = 0, p = 1, D = \mathbb{R}$ und $t_0 = 0 = x_0$.

(1) Sei $f(x) = -x^3$, dann ist $f(x_0) = 0 = f'(x_0)$, und sei $\eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t)^3 \\ x(0) &= \eta. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen ergibt die Lösung $x(t) = \frac{|\eta|}{\sqrt{1+2t\eta^2}}$ $(t \geqslant 0)$, damit ist $\omega_+ = \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für $|\eta| < \delta$ und $t \geqslant 0$:

$$|x(t) - x_0| = |x(t)| \leqslant |\eta| < \delta = \varepsilon$$

sowie $|x(t)| \to 0 = x_0$ $(t \to \infty)$, d.h. x_0 ist asymptotisch stabil.

(2) Jetzt sei $f(x) = x^3$, dann ist wieder $f(x_0) = 0 = f'(x_0)$ und zu $\eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^3 \\ x(0) &= \eta. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen ergibt die Lösung $x(t) = \frac{|\eta|}{\sqrt{1-2t\eta^2}}$ und es ist $1 - 2t\eta^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2\eta^2}$, also $\omega_+ = \frac{1}{2\eta^2} < \infty$. Daher ist $x_0 = 0$ instabil.

Ab sofort sei o.B.d.A. $x_0 = 0$, die Verallgemeinerung auf $x_0 \neq 0$ ist naheliegend. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Definition. Sei $r > 0$ so, dass $U_r(0) \subseteq D$ und $V : U_r(0) \to \mathbb{R}$ stetig db.
V heißt eine **Lyapunov-Funktion** (LF) zu $x' = f(x)$ im Punkt $x_0 = 0$:⇔
$V(0) = 0, V(x) > 0$ $(x \in \dot{U}_r(0))$ und $V'(x) \cdot f(x) \leqslant 0$ $(x \in U_r(0))$.

4.4 Lemma. Sei $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ db, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $h' \leqslant \lambda$ auf $[0, \infty)$.
Dann ist $h(t) \leqslant h(0) + \lambda t$ $(t \geqslant 0)$.

BEWEIS Sei $g(t) := h(t) - h(0) - \lambda t$ für $t \geqslant 0$, dann ist $g(0) = 0$ und daher $g(t) = g(t) - g(0) = tg'(\xi) = t(h'(\xi) - \lambda) \leqslant 0$ nach Vor. und dem MWS mit einem $\xi \in [0, t]$. q.e.d.

4.5 Satz. Besitzt $x' = f(x)$ eine LF $V : U_r(0) \to \mathbb{R}$, so ist x_0 stabil. Gilt zusätzlich $V'(x) \cdot f(x) < 0$ $(x \in \dot{U}_r(0))$, so ist x_0 asymptotisch stabil.

BEWEIS O.B.d.A. sei $t_0 = 0$. Sei $0 < \delta_0 < r, \alpha := \min\{V(x) : \|x\| = \delta_0\} > 0$ nach Vor. sowie $W := \{x \in U_{\delta_0}(0) : V(x) < \alpha\} \neq \emptyset$ wegen $0 \in W$. Dann ist $W \subseteq U_{\delta_0}(0)$ und W ist offen, da V stetig. Nun sei $x_1 \in W$ und $x : [0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_1. \end{aligned}$$

Es ist $x(0) = x_1 \in W$. <u>Annahme:</u> $\exists s \in (0, \omega_+) : x(s) \notin W$. Sei $s_0 := \inf\{s \in (0, \omega_+) : x(s) \in W\}$. x ist stetig, daher ist auch $x(s_0) \notin W$ und $x(t) \in W$ $(t \in I := [0, s_0))$. Also

$$\|x(t)\| < \delta_0, V(x(t)) < \alpha \ (t \in I) \Rightarrow \|x(s_0)\| \leqslant \delta, V(x(s_0)) \leqslant \alpha \ (t \to s_0-)$$

und damit $\|x(s_0)\| = \delta_0$ oder $V(x(s_0)) = \alpha$. Für $t \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(x(t))) = V'(x(t)) \cdot x'(t) = V'(x(t)) \cdot f(x(t)) \leqslant 0$$

nach Vor., da $x(t) \in W \subseteq U_{\delta_0}(0) \subseteq U_r(0)$. Daher ist $V \circ x$ auf I fallend und wir erhalten $V(x(s_0)) \leqslant V(x(0)) = V(x_1) < \alpha$. Es kann also nur $\|x(s_0)\| = \delta_0$ gelten. Dann ist aber $\alpha \leqslant V(x(s_0))$ nach Def. von α. Widerspruch! ↯ Also gilt $x(t) \in W$ $(t \in [0, \omega_+))$.
<u>Annahme:</u> $\omega_+ < \infty$. Es ist $\overline{W} \subseteq \overline{U_{\delta_0}(0)} \subseteq U_r(0) \subseteq D$ und daher dann

$$G_+ = \{(t, x(t)) : t \in [0, \omega_+)\} \subseteq \underbrace{[0, \omega_+] \times \overline{W}}_{\text{kompakt}} \subseteq \mathbb{R} \times D$$

im Widerspruch zu Satz 2.2! ↯ Also ist $\omega_+ = \infty$. Nun sei $\varepsilon > 0$ und $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, r\}$ gewählt, also $\delta_0 < r, \delta_0 < \varepsilon$. $0 \in W$ und W ist offen, daher ex. ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta(0) \subseteq W$ und wegen $W \subseteq U_{\delta_0}(0)$ ist $\delta \leqslant \delta_0$. Sei $x_1 \in \mathbb{R}^p$ mit $\|x_1\| < \delta$, also $x_1 \in U_\delta(0) \subseteq W$ und $x : [0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ wie oben, dann folgt $\omega_+ = \infty$ und $x(t) \in W \subseteq U_{\delta_0}(0) \subseteq U_\varepsilon(0)$ $(t \geqslant 0)$ und daher

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t)\| < \varepsilon \ (t \geqslant 0).$$

Das bedeutet: $x_0 = 0$ ist stabil.

Nun gelte $V'(x) \cdot f(x) < 0$ $(x \in \dot{U}_r(0))$. Sei wieder $\varepsilon > 0$ und δ_0, δ, x_1, x wie oben.
<u>Fall 1:</u> $x(0) = x_1 = 0 = x_0$. Dann ist $x(t) = x_0 = 0$ $(t \geqslant 0)$ nach Satz 2.6 und daher $V(x(t)) = V(0) = 0 \to 0$ $(t \to \infty)$.
<u>Fall 2:</u> $x(0) = x_1 \neq 0 = x_0$. <u>Annahme:</u> $\exists t_1 > 0 : x(t_1) = 0$. Dann löst x das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

das auch durch $z = 0$ auf $\mathbb{R}$ eindeutig gelöst wird. Also ist $x = z = 0$ auf $[0, \infty)$ und daher $x_1 = x(0) = z(0) = 0$. ↯ Widerspruch! Wir erhalten $x(t) \neq 0$ $(t \geqslant 0)$. Da auch $x(t) \in W \subseteq U_{\delta_0}(0) \subseteq U_r(0)$ $(t \geqslant 0)$, ist also $x(t) \in \dot{U}_r(0)$ $(t \geqslant 0)$ und aus der Vor. folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V(x(t))\right) = V'(x(t)) \cdot f(x(t)) < 0 \ (t \geqslant 0),$$

d.h. $V \circ x$ ist auf $[0, \infty)$ sogar streng fallend und der GW $\gamma := \lim\limits_{t \to \infty} V(x(t))$ ex. Sei $\beta := V(x_1) = V(x(0))$, dann ist $\beta \geqslant V(x(t)) > \gamma$ und $V(x(t)) \geqslant 0$ $(t \geqslant 0)$, also $\gamma \geqslant 0$.
<u>Annahme:</u> $\gamma > 0$. Sei $K := \{x \in \overline{U_{\delta_0}(0)} : \gamma \leqslant V(x) \leqslant \beta\} \neq \emptyset$ wegen $x_1 \in K$. K ist kompakt und $K \subseteq \dot{U}_r(0)$ wegen $0 \notin K$. Sei weiter $\lambda := \max\{V'(x) \cdot f(x) : x \in K\}$, dann ist wegen $V'(x) \cdot f(x) < 0$ $(x \in K)$ nach Vor. $\lambda < 0$. Für $t \geqslant 0$ ist $x(t) \in W \subseteq U_{\delta_0}(0)$ und $\beta = V(x_1) = V(x(0)) \geqslant V(x(t)) \geqslant \gamma$, da $V \circ x$ fallend, also $x(t) \in K$. Damit ist auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(x(t))) = V'(x(t)) \cdot f(x(t)) \leqslant \lambda < 0 \ (t \geqslant 0).$$

Aus Lemma 4.4 folgt nun mit $h := V \circ x$

$$V(x(t)) \leqslant V(x_1) + \lambda t = \beta + \lambda t \to -\infty \ (t \to \infty),$$

da $\lambda < 0$. ↯ Widerspruch zur Vor. $V(x(t)) \geqslant 0$ $(t \geqslant 0)$! Also ist $\gamma = \lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$.
Nun sei (t_n) eine Folge in $[0,\infty)$ mit $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. $x(t_n) \in K$ $(n \in \mathbb{N})$, also ist $(x(t_n))$ beschränkt und enthält eine konvergente TF $(x(t_{n_k}))$. Sei $z_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x(t_{n_k})$, dann ist

$$V(z_0) = \lim_{k\to\infty} V(x(t_{n_k})) = \gamma = 0$$

und nach Vor. kann dann nur $z_0 = 0$ sein. Das bedeutet: Jede konvergente TF von $(x(t_n))$ konvergiert gegen 0 und damit auch $x(t_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.
Insgesamt: $x(t) \to 0 = x_0$ $(t \to \infty)$, d.h. $x_0 = 0$ ist asymptotisch stabil. q.e.d.

Beispiel. $p = 3, D = \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = (2yz - 2y, x - xz, -z^3)$. Dann ist

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z-2 & 2y \\ 1-z & 0 & -x \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f(0,0,0)$ hat die EW $0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$, es ist also $\mathfrak{Re}\,\lambda = 0$ für jeden EW λ von $f'(0,0,0)$ und die Sätze 4.2 und 4.3 liefen keine Entscheidung. Sei $V(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + z^2$. Dann ist $V(0) = 0, V(x,y,z) > 0$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), V'(x,y,z) = (2x, 4y, 2z)$ und daher

$$V'(x) \cdot f(x) = (2x, 4y, 2z) \cdot \begin{pmatrix} 2yx - 2y \\ x - xz \\ -z^3 \end{pmatrix} = -2z^4 \leqslant 0 \ ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3),$$

d.h. V ist ein LF zu $w' = f(w)$. Nach Satz 4.5 ist $x_0 = (0,0,0)$ stabil.

Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ mit $\mathfrak{Re}\,\lambda < 0$ $(\lambda \in \sigma_p(A))$ und betrachte das lineare System $x' = Ax$. Wir wissen nach Satz 4.2 bereits: $x_0 = 0$ ist asymptotisch stabil. Dieses Resultat können wir auch aus Satz 4.5 gewinnen: Seien $(\cdot|\cdot), \langle\cdot|\cdot\rangle$ und $\|\cdot\|_0$ wie in Lemma 4.1 und setze

$$V(x) := \|x\|_0^2 = \langle x|x\rangle = \int_0^\infty (e^{tA}x|e^{tA}x)\,\mathrm{d}t \ (x \in \mathbb{R}^p).$$

Nachrechnen: $V(0) = 0, V(x) > 0$ $(x \neq 0)$ und $V'(x) \cdot f(x) = -\|x\|_0^2 < 0$ für $f(x) = Ax$, d.h. V ist eine LF von $x' = Ax$. Weiter gilt $V'(x) \cdot f(x) < 0$ $(x \neq 0)$, daher ist $x_0 = 0$ nach Satz 4.5 asymptotisch stabil.

§ 5 Randwertprobleme

In diesem Paragraphen seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b]; q, r \in C(I), p \in C^1(I), p > 0$ auf I; $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0, 0) \neq (\beta_0, \beta_1)$ und $\eta_a, \eta_b \in \mathbb{R}$.

Definition. Die Abbildung $L : C^2(I) \to C(I)$,

$$Lu := (pu')' + qu = pu'' + p'u' + qu$$

heißt ein **selbstadjungierter Differentialoperator 2. Ordnung** und ist linear.
Die Abbildungen $R_a, R_b : C^2(I) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} R_a u &:= \alpha_0 u(a) + \alpha_1 p(a) u'(a), \\ R_b u &:= \beta_0 u(b) + \beta_1 p(b) u'(b) \end{aligned}$$

heißen **Randoperatoren** und sind linear.
Damit betrachten wir das **Sturmsche Randwertproblem** (RWP)

$$\begin{aligned} Lu(t) &= r(t) \\ R_a u &= \eta_a \\ R_b u &= \eta_b. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es ist $Lu = r \Leftrightarrow pu'' + p'u' + qu = r$. Für $r = 0$ und $\eta_a = 0 = \eta_b$ spricht man vom zugehörigen **homogenen RWP**.
Für $R_a u = u(a)$ und $R_b u = u(b)$ spricht man von **Randoperatoren erster Art** und einem **Dirichletschen RWP**; für $R_a u = u'(a)$ und $R_b u = u'(b)$ spricht man von **Randoperatoren zweiter Art** und einem **Neumannschen RWP**.

Bemerkung. Aus der Analysis II ist bekannt:

(1) Für $t_0 \in I$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das AWP

$$\begin{aligned} Lu(t) &= r(t) \\ u(t_0) &= \alpha \\ u'(t_0) &= \beta \end{aligned}$$

genau eine Lösung auf I, insbesondere hat $Lu = r$ Lösungen auf I.

(2) Sind $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von $Lu = 0$ und linear unabhängig, so bilden sie ein

Fundamentalsystem (FS) von $Lu = 0$. Ist $u_S : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung von $Lu = r$, so lautet die allgemeine Lösung von $Lu = r$:

$$u_S + c_1 u_1 + c_2 u_2 \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5.1 Satz. (1) Ist $u_S : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung von (5.1) und durchläuft $u_H : I \to \mathbb{R}$ alle Lösungen des zugehörigen homogenen RWP, so durchläuft $u = u_S + u_H$ alle Lösungen von (5.1).

(2) Sind $a_0, a_1, s \in C(I)$, so lässt sich das RWP

$$\begin{aligned} u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) &= s(t) \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) &= \eta_a \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) &= \eta_b \end{aligned}$$

auf die Form (5.1) bringen.

BEWEIS (1) Nachrechnen. (2) Setze $p(t) := \exp(\int_a^t a_1(s)\,\mathrm{d}s), q := a_0 p$ und $r := sp$, so folgt die Beh. durch Nachrechnen. q.e.d.

Beispiel. $I = [0,1], p = 1, q = \pi^2$, also $Lu = u'' + \pi^2 u$. Das zu $Lu = 0$ gehörige charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + \pi^2 = (\lambda + i\pi)(\lambda - i\pi)$, Nullstellen sind also $\pm i\pi$. Damit ist $\cos(\pi t), \sin(\pi t)$ ein FS von $Lu = 0$ und die allgemeine Lösung von $Lu = 0$ lautet

$$u(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1) Für die Lösung des RWP

$$\begin{aligned} Lu(t) &= 0 \\ u(0) &= 0 = u(1) \end{aligned}$$

muss gelten: $0 = u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$, also $u(t) = c_2 \sin(\pi t)$. $u(1) = 0$ ist nun für jedes $c_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt, daher hat das RWP unendlich viele Lösungen $u(t) = c \sin(\pi t)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(2) Für das RWP

$$\begin{aligned} Lu(t) &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

folgt zunächst wie in (1) $c_1 = 0$, also $u(t) = c_2 \sin(\pi t)$. Weiter gilt $u'(t) = c_2 \pi \cos(\pi t)$ und daher $0 = u'(1) = -c_2 \pi$. Also wird das RWP eindeutig durch $u = 0$ gelöst.

(3) Für das RWP

$$\begin{aligned} Lu(t) &= 1 \\ u(0) &= 0 = u(1) \end{aligned}$$

benötigt man zunächst eine spezielle Lösung von $Lu = 1$, etwa $u_S = \frac{1}{\pi^2}$. Damit lautet die allgemeine Lösung $u(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}$ und es folgt

$$\begin{aligned} 0 = u(0) &= \frac{1}{\pi^2} + c_1 \\ 0 = u(1) &= \frac{1}{\pi^2} - c_1. \end{aligned}$$

Dieses RWP ist also unlösbar.

5.2 Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Das RWP (5.1) ist für jede Wahl von r, η_a, η_b eindeutig lösbar.

(2) Das zugehörige homogene RWP ist nur trivial lösbar.

(3) Ist $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ ein FS von $Lu = 0$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_a u_1 & R_a u_2 \\ R_b u_1 & R_b u_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

BEWEIS Sei $u_S : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung von $Lu = r$, so lautet die allgemeine Lösung von $Lu = r : u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_S(t)$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \eta_a &= R_a u + c_1 R_a u_1 + c_2 R_a u_2 + R_a u_S \\ \eta_b &= R_b u + c_1 R_b u_1 + c_2 R_b u_2 + R_b u_S \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 R_a u_1 + c_2 R_a u_2 &= \eta_a - R_a u_S \\ c_1 R_b u_1 + c_2 R_b u_2 &= \eta_b - R_b u_S, \end{aligned}$$

dies ist ein LGS für (c_1, c_2). Damit folgt:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \text{Dieses LGS ist eindeutig lösbar} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} R_a u_1 & R_a u_2 \\ R_b u_1 & R_b u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (3) \\ &\Leftrightarrow \text{Dieses LGS hat nur die Triviallösung} \Leftrightarrow (2). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.3 Satz. Seien $u, v : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von $Lu = 0$. Dann gilt:

(1) $\exists c \in \mathbb{R} : p(t)(u(t)v'(t) - v(t)u'(t)) = c \ (t \in I)$.

(2) u, v ist ein FS von $Lu = 0 \Leftrightarrow c \neq 0$ in (1).

BEWEIS (1) $f := pv'u - pu'v$ ist db mit $f' = (pv')'u + pv'u' - (pu')'v - pu'v' = -qvu + quv = 0$ auf I. Beachte: $Lu = 0 \Leftrightarrow (pu')' = -qu$.
(2) Für $t \in I$ sei $W(t) := \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$ die **Wronski-Determinante**, so folgt aus (1): Es ex. ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $W(t)p(t) = c$ $(t \in I)$. Wegen $p > 0$ erhalten wir (mit der Analysis II) nun: $c \neq 0 \Leftrightarrow W(t) \neq 0$ $(t \in I) \Leftrightarrow u,v$ ist ein FS von $Lu = 0$. q.e.d.

Definition. (1) Sei u, v ein FS von $Lu = 0$. Die Konstante c in Satz 5.3(1) wird mit $c(u, v)$ bezeichnet.

(2) Für $\tau \in I : u_\tau(t) := \frac{1}{c}(u(\tau)v(t) - u(t)v(\tau))$.

5.4 Satz. Sei $u, v : I \to \mathbb{R}$ ein FS von $Lu = 0$ und $c = c(u, v), u_\tau$ wie oben. Für $t \in I$ sei

$$u_S(t) := \int_a^t u_\tau(t)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Dann ist $u_S(a) = 0 = u_S'(a)$, also $R_a u_S = 0$, und u_S ist eine spezielle Lösung von $Lu = r$.

BEWEIS Klar ist $u_S(a) = 0$. Weiter gilt

$$u_S(t) = \frac{1}{c}\left(v(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - u(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

und daher

$$\begin{aligned} u_S'(t) &= \frac{1}{c}\left(v'(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau + v(t)u(t)r(t) - u'(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - u(t)v(t)r(t)\right) \\ &= \frac{1}{c}\left(v'(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - u'(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst $u_S'(a) = 0$ und weiter

$$p(t)u_S'(t) = \frac{1}{c}\left(p(t)v'(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - p(t)u'(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Wir erhalten schließlich mit $(pu')' = -qu$:

$$\begin{aligned} (pu_S')'(t) &= \frac{1}{c}\Bigg((pv')'(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau + p(t)v'(t)u(t)r(t) \\ &\qquad -(pu')'(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - p(t)u'(t)v(t)r(t)\Bigg) \\ &= \frac{1}{c}\left(-q(t)v(t)\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau + q(t)u(t)\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &\quad + \frac{1}{c}\Big(p(t)r(t)\left(v'(t)u(t) - u'(t)v(t)\right)\Big) \\ &= -q(t)u_S(t) + r(t), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 5.3(1) verwendet haben. q.e.d.

5.5 Folgerung. Seien u, v, u_S und $c = c(u, v)$ wie in Satz 5.4. Dann lautet die allgemeine Lösung von $Lu = r : u_S(t) + c_1 u(t) + c_2 v(t) =$

$$u(t)\left(c_1 - \frac{1}{c}\int_a^t v(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + v(t)\left(c_2 + \frac{1}{c}\int_a^t u(\tau)r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \quad (t \in I) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS Nachrechnen. q.e.d.

Die Greensche Funktion

zu L, R_a, R_b. Im Folgenden gelte stets

$$\text{Das zu (5.1) gehörige homogene RWP ist nur trivial lösbar.} \tag{V}$$

In diesem Fall hat (5.1) auf I genau eine Lösung (siehe Satz 5.2).

Definition. Sei $u, v : I \to \mathbb{R}$ ein FS von $Lu = 0$. u, v heißt **zulässig** $:\Leftrightarrow$
$R_a u = 0 = R_b v$ und $R_b u \neq 0 \neq R_a v$.

5.6 Lemma. Es gelte (V).

(1) Es gibt zulässige FS von $Lu = 0$.

(2) Sind u, v und $\tilde{u}, \tilde{v}$ zulässige FS von $Lu = 0$, so ex $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{u} = \alpha u, \tilde{v} = \beta v$ und $c(\tilde{u}, \tilde{v}) = \alpha\beta c(u, v)$, insbesondere ist $\alpha\beta \neq 0$.

BEWEIS (1) Wähle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ so, dass $\lambda\alpha_0 + \mu\alpha_1 = 0$. Dann hat das AWP

$$\begin{aligned} Lu(t) &= 0 \\ u(a) &= \lambda \\ u'(a) &= \frac{\mu}{p(a)} \end{aligned}$$

auf I genau eine Lösung $u \neq 0$ mit $R_a u = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 p(a) u'(a) = \alpha_0\lambda + \alpha_1\mu = 0$. Wäre $R_b u = 0$, so wäre u eine nichttriviale Lösung des zu (5.1) gehörigen RWP im Widerspruch zu (V). Also ist $R_b u \neq 0$. Analog gibt es eine Lösung $v \neq 0$ von $Lu = 0$ mit $R_a v \neq 0$ und $R_b v = 0$. <u>Annahme:</u> $\exists \gamma \in \mathbb{R} : v = \gamma u$, dann wäre $0 \neq R_a v = \gamma R_a u = 0$ ↯ Also ist u, v ein FS von $Lu = 0$.
(2) Nach Vor. ex. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{u} = \alpha u + \gamma v$ und $\tilde{v} = \delta u + \beta v$. Dann gilt aber $0 = R_a\tilde{u} = \alpha R_a u + \gamma R_a v = \gamma R_a v$ und daher $\gamma = 0$ wegen $R_a v \neq 0$, also $\tilde{u} = \alpha u$. Analog folgt auch $\delta = 0$, also $\tilde{v} = \beta v$. Wir erhalten

$$c(\tilde{u}, \tilde{v}) = p(t)(\tilde{u}(t)\tilde{v}'(t) - \tilde{u}'(t)\tilde{v}(t)) = p(t)(\alpha u(t)\beta v'(t) - \alpha u'(t)\beta v(t)) = \alpha\beta c(u, v). \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel. $a = 0, b = 1, Lu = u'' + \pi^2 u, R_a u = u(0), R_b u = u'(1)$. Bekannt: Das RWP

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \\ R_a u &= R_b u = 0 \end{aligned}$$

ist nur trivial lösbar, d.h. (V) ist erfüllt. Wähle $u(t) := \sin(\pi t), v(t) := \cos(\pi t)$, so ist

$$\begin{aligned} R_a u &= u(0) = 0, & R_b u &= u'(1) = -\pi \neq 0 \\ R_b v &= v(0) = 1 \neq 0, & R_b v &= v'(1) = 0, \end{aligned}$$

d.h. u, v ist ein zulässiges FS von $Lu = 0$. Seien nun $\bar{u} := u + v$ und $\bar{v} := u - v$, dann ist $\bar{u}, \bar{v}$ ein FS von $Lu = 0$ und es gilt $R_a \bar{u} = R_a u + R_a v = 1 \neq 0$ sowie $R_b \bar{u} = R_b u - R_b v = -\pi \neq 0$, d.h. $\bar{u}, \bar{v}$ ist kein zulässiges FS von $Lu = 0$.

Im Folgenden konstruieren wir die Lösung des zu (5.1) gehörigen **halbhomogenen RWP**

$$\begin{aligned} Lu(t) &= r(t) \\ R_a u &= R_b u = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

unter der Vor. (V). Dazu sei $u, v : I \to \mathbb{R}$ ein zulässiges Fundamentalsystem von $Lu = 0$ und u_S wie in Satz 5.4 eine spezielle Lösung von $Lu = r$ mit $R_a u_S = 0$. Sei $w : I \to \mathbb{R}$ die Lösung von (5.2), dann ex. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $w = u_S + c_1 u + c_2 v$ auf I. Wegen

$$0 = R_a w = \underbrace{R_a u_S}_{=0} + \underbrace{c_1 R_a u}_{=0} + c_2 R_a v$$

und $R_a v \neq 0$ ist $c_2 = 0$, also $w = u_S + c_1 u$. Aus

$$0 = R_b w = R_b u_S + c_1 R_b u$$

und $R_b u \neq 0$ folgt weiter $c_1 = -\frac{R_b u_S}{R_b u}$ und mit $c = c(u, v)$ daher $c_1 = \frac{1}{c} \int_a^b v(\tau) r(\tau) \,\mathrm{d}\tau$ sowie (Nachrechnen!)

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{c} \left(v(t) \int_a^t u(\tau) r(\tau) \,\mathrm{d}\tau + u(t) \int_a^t v(\tau) r(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \\ &= \int_a^b G(t, \tau) r(\tau) \,\mathrm{d}\tau \text{ mit} \\ G(t, \tau) :&= \begin{cases} \frac{u(\tau) v(t)}{c}, & a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b, \\ \frac{u(t) v(\tau)}{c}, & a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b. \end{cases} \end{aligned}$$

G heißt die **Greensche Funktion** zu L, R_a, R_b. Eigenschaften:

(1) G ist stetig auf $I \times I$.

(2) $G(t,\tau) = G(\tau,t)$ $(t,\tau \in I)$.

(3) G ist unabhängig von der Wahl des zulässigen FS von $Lu = 0$.

BEWEIS (1), (2) Klar. (3) Sei $\tilde{u}, \tilde{v}$ ein weiteres zulässiges FS von $Lu = 0$. Dann ex. nach Lemma 5.6 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{u} = \alpha u, \tilde{v} = \beta v$ und $c(\tilde{u}, \tilde{v}) = \alpha\beta c(u,v) = \alpha\beta c$. Damit folgt etwa

$$\frac{\tilde{v}(t)\tilde{u}(\tau)}{c(\tilde{u},\tilde{v})} = \frac{\beta v(t)\alpha u(\tau)}{\alpha\beta c(u,v)} = \frac{v(t)u(\tau)}{c}. \quad \text{q.e.d.}$$

5.7 Satz. Es gelte (V). Sei $u, v : I \to \mathbb{R}$ ein zulässiges FS von $Lu = 0$, G die Greensche Funktion und $w : I \to \mathbb{R}$ die Lösung von (5.2). Für $t \in I$ sei weiter

$$\tilde{w}(t) := w(t) + \frac{\eta_b}{R_b u} u(t) + \frac{\eta_a}{R_a v} v(t).$$

Dann ist $\tilde{w}$ die Lösung von (5.1) auf I.

BEWEIS Nachrechnen. q.e.d.

5.8 Beispiel. Seien $a = 0, b = 1, p = 1, q = 0$, also $Lu = u''$, sowie $R_a u = u(0)$ und $R_b u = u(1)$. Wähle $u(t) = t, v(t) = 1 - t$ als zulässiges FS von $Lu = 0$, dann ist $c(u,v) = c = -1$, also

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (t-1)\tau, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1, \\ (\tau - 1)t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Es ist $G \leqslant 0$ auf $[0,1]^2$ und $G(0,\tau) = 0 = G(1,\tau)$ $(\tau \in [0,1])$.

Ab sofort sei $I = [0,1], D := I \times \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, wir betrachten das RWP

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t, u(t)) \\ 0 &= u(0) = u(1) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sei G wie in Beispiel 5.8 und $T : C(I) \to C(I), Tu(x) := \int_0^1 G(x,t) f(t,u(t))\,\mathrm{d}t$ $(x \in I)$.

5.9 Satz. Seien $r, u \in C(I)$ und $\Psi(x) := \int_0^1 G(x,t) r(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) $\Psi \in C^2(I)$ mit $\Psi'' = r$ und $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$.

(2) u ist eine Lösung von (5.3) $\Leftrightarrow Tu = u$.

BEWEIS (1) Aus Satz 5.7 folgt: Ψ ist die Lösung des RWP

$$\begin{aligned} u'' &= r \\ 0 &= u(0) = u(1). \end{aligned} \tag{*}$$

(2) „$\Rightarrow$“: Sei u eine Lösung von (5.3) und $r(t) := f(t, u(t))$ $(t \in I)$, dann ist u eine Lösung von (*) und aus Satz 5.7 folgt:

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) r(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t)) = Tu(x).$$

„$\Leftarrow$“: Sei $Tu = u$, also $u(x) = \int_0^1 G(x,t) r(t) \,\mathrm{d}t$ mit $r(t) := f(t, u(t))$, dann folgt aus (1): $u \in C^2(I), u'' = r$ und $u(0) = u(1) = 0$, d.h. u ist eine Lösung von (5.3). q.e.d.

5.10 Satz (Lettenmeyer). Sei $L \in (0, \pi^2)$ und es gelte

$$\forall t \in [0,1], x, \bar{x} \in \mathbb{R} : |f(t,x) - f(t,\bar{x})| \leqslant L|x - \bar{x}|.$$

Dann hat das RWP (5.3) genau eine Lösung auf I.

BEWEIS Sei $V := C(I), c > 0$ so, dass $L < c^2 < \pi^2$, und $q := \frac{L}{c^2} < 1$. Weiter sei $\varphi(x) := \cos(c(x - \frac{1}{2}))$ $(x \in I)$, dann ist $\varphi(x) \geqslant \cos(\frac{c}{2}) > 0$ $(x \in I)$ (Übung). Wir versehen V mit der Norm

$$\|u\| := \max\left\{\frac{|u(t)|}{\phi(t)} : t \in I\right\} = \left\|\frac{u}{\varphi}\right\|_\infty,$$

dann sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalente Normen auf V und $(V, \|\cdot\|)$ ist ein BR (siehe § 1). Seien $u, v \in V$ und $x \in I$. Dann gilt mit der Vor. und $G \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}
|Tu(x) - Tv(x)| &= \left|\int_0^1 G(x,t)\left(f(t,u(t)) - f(t,v(t))\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \big|G(x,t)\big| \cdot \big|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\big| \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant L \int_0^1 \big|G(x,t)\big| \cdot \big|u(t) - v(t)\big| \cdot \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)} \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant L\|u - v\| \int_0^1 \big|G(x,t)\big| \varphi(t) \,\mathrm{d}t \\
&= L\|u - v\| \underbrace{\int_0^1 G(x,t)(-\varphi(t)) \,\mathrm{d}t}_{=:\Psi(x)}.
\end{aligned}$$

Aus Satz 5.9(1) folgt nun: $\Psi \in C^2(I), \Psi'' = -\varphi$ und $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$. Nachrechnen: $\Psi(x) = \frac{1}{c^2}(\varphi(x) - \cos(\frac{c}{2}))$ $(x \in I)$. Damit erhalten wir

$$\frac{|Tu(x) - Tv(x)|}{\varphi(x)} \leqslant \frac{L}{c^2}\|u - v\|(1 - \frac{\cos(\frac{c}{2})}{\varphi(x)}) \leqslant q\|u - v\| \;(x \in I),$$

also auch $\|Tu - Tv\| \leqslant q\|u - v\|$. Das bedeutet: T ist eine Kontraktion. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz und Satz 5.9(2) folgt die Beh. q.e.d.

Bemerkung. Die Konstante π^2 in Satz 5.10 ist optimal, das zeigen die Beispiele vor Satz 5.2: Dort war $Lu = u'' + \pi^2 u$, also $f(t,x) = -\pi^2 x$.

Bemerkung. Unter Verwendung der gewöhnlichen Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ im obigen Beweis erhält man eine schwächere Aussage: Dann ist nämlich

$$|G(x,t)| = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ (1-t)x, & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

woraus man berechnet:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G(x,t)| \, \mathrm{d}t &= \int_0^x |G(x,t)| \, \mathrm{d}t + \int_x^1 |G(x,t)| \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - x) =: g(x) \leqslant g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Somit ist auch

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leqslant L \int_0^1 |G(x,t)||u(t) - v(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{L}{8} \|u - v\|$$

und daher $\|Tu - Tv\|_\infty \leqslant \frac{L}{8}\|u - v\|_\infty$. T ist also nur dann eine Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, falls $L < 8 < \pi^2$.

5.11 Satz (Existenzsatz)**.** Seien $A \geqslant 0, 0 \leqslant B < \pi^2$ und es gelte:

$$\forall t \in I, x \in \mathbb{R} : |f(t,x)| \leqslant A + B|x|.$$

Dann hat das RWP (5.3) eine Lösung auf I.

Ohne BEWEIS.

Bemerkung. Auch die Konstante π^2 in Satz 5.11 ist optimal, denn das RWP

$$\begin{aligned} u'' &= 1 - \pi^2 u \\ 0 &= u(0) = u(1) \end{aligned}$$

ist unlösbar. Hier ist $A = 1, B = \pi^2$ und $f(t,x) = 1 - \pi^2 x$.

§ 6 Die eindimensionale Wellengleichung

Eine schwingende Saite der Länge L und Dichte ϱ ist unter der Spannkraft F zwischen $x = 0$ und $x = L$ eingespannt. Die Auslenkung $u(t, x)$ an der Stelle x zur Zeit t wird beschrieben durch die partielle DGL.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{6.1}$$

mit $t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant L$ und $c^2 := \frac{F}{\varrho^2}$, das ist die **eindimensionale Wellengleichung**. Seien $\xi := x + ct$ und $\eta := x - ct$, also $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ und $t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$, sowie u zweimal stetig db und

$$v(\xi, \eta) := u(x, t) = u(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)).$$

Nachrechnen: $u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$ und $u_{tt} = c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})$ sowie (6.1) $\Leftrightarrow v_{\xi\eta} = 0$. Aus $v_{\xi\eta} = 0$ folgt zunächst $v_\xi = w(\xi)$ mit w stetig db. Sei w_1 eine SF von w, dann ist also $v(\xi, \eta) = w_1(\xi) + w_2(\eta)$ mit w_2 zweimal stetig db. Wir erhalten

$$u(x,t) = w_1(x + ct) + w_2(x - ct). \tag{6.2}$$

Insgesamt gilt also für u zweimal stetig db: u ist eine Lösung von (6.1) $\Leftrightarrow$ Es ex. w_1, w_2 zweimal stetig db, die (6.2) erfüllen. Wir betrachten nun noch Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \text{ (Anfangszustand)} \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \text{ (Anfangsgeschwindigkeit)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

mit $u_2 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Das AWP (6.1) mit (6.3) heißt **Cauchy-Problem** für die Wellengleichung. Aus (6.2) folgt:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= w_1(x) + w_2(x), \\ u_1(x) &= c(w_1'(x) - w_2'(x)). \end{aligned}$$

Daher ex. eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, sodass $w_1(x) - w_2(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) \, \mathrm{d}s + K$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) \, \mathrm{d}s + \frac{K}{2}, \\ w_2(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) \, \mathrm{d}s - \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

Mit (6.2) folgt nun:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

ist die eindeutige bestimmte Lösung des Cauchy-Problems.

§ 7 Anfangswertprobleme (Fortsetzung)

7.1 Satz (Nagumo)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I = [a, b], D := I \times \mathbb{R}, f \in C(D, \mathbb{R}), t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, weiter gelte

$$\forall t \in I \setminus \{t_0\}, x, \bar{x} \in \mathbb{R} : |f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leqslant \frac{|x - \bar{x}|}{|t - t_0|}.$$

Dann hat das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

auf I höchstens eine Lösung.

BEWEIS Seien $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen des AWP (7.1) und $x := x_1 - x_2$, dann ist $x(t_0) = 0$ und daher

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)}{t - t_0} &= \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) = x_1'(t_0) - x_2'(t_0) \\ &= f(t_0, x_1(t_0)) - f(t_0, x_2(t_0)) = f(t_0, x_0) - f(t_0, x_0) = 0. \end{aligned}$$

Sei $h : I \to \mathbb{R}$,

$$h(t) := \begin{cases} \frac{|x(t)|}{|t - t_0|}, & t \neq t_0, \\ 0, & t = t_0, \end{cases}$$

dann ist h stetig auf I und nach Vor. gilt

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leqslant \frac{|x_1(t) - x_2(t)|}{|t - t_0|} = h(t) \ (t \in I).$$

Für $j \in \{1, 2\}$ ist $x_j'(t) = f(t, x_j(t))$ $(t \in I)$ und daher $x_j(t) = x_j(t_0) + \int_{t_0}^t f(t, x_j(t))\, \mathrm{d}t = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_j(t))\, \mathrm{d}t$ $(t \in I)$. Es folgt

$$\begin{aligned} |x(t)| = |x_1(t) - x_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))|\, \mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^t h(s)\, \mathrm{d}s \right|. \end{aligned}$$

Annahme: $\exists t_1 \in I : x(t_1) \neq 0$. Wegen $h(t_0) = 0$ ist dann $t_1 \neq t_0$, etwa $t_1 > t_0$. Weiter ex. $\xi \in [t_0, t_1]$, sodass $h(t) \leqslant h(\xi)$ $(t \in [t_0, t_1])$, und wegen $h(t_1) > 0$ ist $h(\xi) > 0$ und daher auch $t_0 < \xi$. Daraus folgt wegen $h(t_0) = 0 < h(\xi)$ auch: Es ex. ein $\eta \in (t_0, \xi)$, sodass $h(s) < h(\xi)$ $(s \in [t_0, \eta])$. Wir erhalten nun:

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \frac{|x(\xi)|}{|\xi - t_0|} = \frac{|x(\xi)|}{\xi - t_0} \leqslant \frac{1}{\xi - t_0} \left| \int_{t_0}^{\xi} h(s)\,\mathrm{d}s \right| \\ &= \frac{1}{\xi - t_0} \int_{t_0}^{\xi} h(s)\,\mathrm{d}s < \frac{1}{\xi - t_0} \int_{t_0}^{\xi} h(\xi)\,\mathrm{d}s = h(\xi). \end{aligned}$$

Widerspruch! ↯ Also ist $x = 0$ auf I. q.e.d.

Im Folgenden seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0, I := [t_0, t_0 + a], I_0 := (t_0, t_0 + a], D := I \times \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Definition. Seien $v, w : I \to \mathbb{R}$ db. v heißt eine **Unterfunktion** (UF) bzgl. (7.2) $:\Leftrightarrow$ $v(t_0) \leqslant x_0$ und $v'(t) < f(t, v(t))$ $(t \in I)$. Entsprechend heißt w eine **Oberfunktion** (OF) bzgl. (7.2) $:\Leftrightarrow$ $w(t_0) \geqslant x_0$ und $w'(t) > f(t, w(t))$ $(t \in I)$.

7.2 Lemma. Seien $\Phi, \Psi : I_0 \to \mathbb{R}$ db, $0 < \varepsilon \leqslant a$ und es gelte $\Phi < \Psi$ auf $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ sowie

$$\Phi'(t) - f(t, \Phi(t)) < \Psi'(t) - f(t, \Psi(t)) \ (t \in I_0).$$

Dann ist $\Phi < \Psi$ auf I_0.

BEWEIS Annahme: $\exists t_1 \in I_0 : \Phi(t_1) \geqslant \Psi(t_1)$. Sei $M := \{t \in I_0 : \Phi(t) = \Psi(t)\} \subseteq I_0$, dann ist $M \neq \emptyset$ nach dem ZWS. Sei $\xi := \inf M$, dann ist $\xi \geqslant t_0 + \varepsilon$ nach Vor. und $\Phi(\xi) = \Psi(\xi)$, da Φ, Ψ stetig sind, also $\xi = \min M$. Nun sei $h > 0$ so, dass $\xi - h \in (t_0, \xi)$, dann ist $\Phi(\xi - h) < \Psi(\xi - h)$ und daher auch

$$\frac{\Phi(\xi - h) - \Phi(\xi)}{-h} > \frac{\Psi(\xi - h) - \Phi(\xi)}{-h},$$

beachte $\Phi(\xi) = \Psi(\xi)$. Mit $h \to 0+$ folgt daraus $\Phi'(\xi) \geqslant \Psi'(\xi)$, nach Vor. ist aber

$$\Phi'(\xi) - f(\xi, \Phi(\xi)) < \Psi'(\xi) - f(\xi, \Psi(\xi)) = \Psi'(\xi) - f(\xi, \Phi(\xi)),$$

also $\Phi'(\xi) < \Psi'(\xi)$ ↯ Widerspruch! q.e.d.

7.3 Satz. Seien $v, w, x : I \to \mathbb{R}$, v eine UF bzgl. (7.2), w eine OF bzgl. (7.2) und x eine Lösung von (7.2). Dann ist $v < x < w$ auf I.

BEWEIS Wir zeigen nur $v < x$ auf I_0, $x < w$ analog.

Nach Vor. ist $v'(t) - f(t, v(t)) < 0 = x'(t) - f(t, x(t))$ $(t \in I_0)$, daher genügt es wegen Lemma 7.2 zu zeigen: $\exists \varepsilon \in (0, a] : v < x$ auf $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ (*).
Fall 1: $v(t_0) < x_0 = x(t_0)$. Da v, x stetig sind, folgt daraus sofort (*).
Fall 2: $v(t_0) = x_0 = x(t_0)$. Sei $h := x - v$. Annahme: (*) gilt nicht. Dann ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in (t_0, t_0 + \frac{1}{n})$, sodass $h(t_n) \leqslant 0$, o.B.d.A. $1 \leqslant a$ (wähle n groß genug). Wegen $h(t_0) = 0$ folgt daraus

$$\frac{h(t_n) - h(t_0)}{t_n - t_0} = \frac{h(t_n)}{t_n - t_0} \leqslant 0 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Mit $n \to \infty$ gilt $t_n \to t_0$ und daher $h'(t_0) \leqslant 0$. Andererseits gilt

$$v'(t_0) - f(t_0, v(t_0)) < 0 = x'(t_0) - f(t_0, x(t_0)) = x'(t_0) - f(t_0, v(t_0))$$

und damit $h'(t_0) > 0$. $\lightning$ Widerspruch! q.e.d.

Beispiel. $f(t, x) = \frac{1+t^2}{2} + x^2$. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) = \frac{1+t^2}{2} + x(t)^2 \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \tag{*}$$

f ist stetig db, daher ex. die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $x : (\omega_-, \omega_+) : I \to \mathbb{R}$ von (*), wobei $\omega_- < 0 < \omega_+$. Im Folgenden sei stets $t \geqslant 0 = t_0$.
Sei $f_1(t, x) := x^2$, dann ist $f_1 < f$ auf $\mathbb{R}^2$. Das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f_1(t, x(t)) = x(t)^2 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $v(t) = \frac{1}{1-t}$ auf $(-\infty, 1)$. Sei $a \in (0, 1)$ und $a < \omega_+$, dann gilt für $t \in [0, a]$: $v'(t) = f_1(t, v(t)) < f(t,v(t))$, d.h. v ist eine UF bzgl. (*), und aus Satz 7.3 folgt $v(t) = \frac{1}{1-t} < x(t)$ $(t \in (0, a])$. Annahme: $\omega_+ > 1$. Dann erhalten wir $v(t) = \frac{1}{1-t} < x(t)$ $(t \in (0,1))$ und daher sowohl $x(t) \to \infty$ als auch $x(t) \to x(1) \in \mathbb{R}$ $(t \to 1-)$ $\lightning$ Widerspruch! Also ist $\omega_+ \leqslant 1$ und es gilt

$$\frac{1}{1-t} < x(t) \ (t \in (0, \omega_+)).$$

Nun sei $f_2(t, x) := 1 + x^2$, dann ist $f < f_2$ auf $[0, 1) \times \mathbb{R}$. Das AWP

$$\begin{aligned} x'(t) &= f_2(t, x(t)) = 1 + x(t)^2 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $w(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$ auf $(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4})$. Sei $a \in (0, \omega_+)$ mit $a < \frac{\pi}{4}$, so gilt für $t \in [0, a]$: $w'(t) = f_2(t, w(t)) > f(t, w(t))$, d.h. w ist eine OF bzgl. (*) und aus Satz 7.3 folgt $x(t) < \tan(t + \frac{\pi}{4})$ $(t \in [0, a])$. Annahme: $\omega_+ < \frac{\pi}{4}$. Dann gilt $x(t) < \tan(t + \frac{\pi}{4})$ $(t \in (0, \omega_+))$, d.h. x ist auf $(0, \omega_+)$ nach oben beschränkt mit $x'(t) = \frac{1+t^2}{2} + x(t)^2 > 0$

$(t \in (0, \omega_+))$. Damit ist x auf $(0, \omega_+)$ streng monoton wachsend, der GW $\lim\limits_{t \to \omega_+ -} x(t)$ ex. in $\mathbb{R}$ und x kann auf $(0, \omega_+]$ fortgesetzt werden. ↯ Widerspruch! Also ist $\omega_+ \geqslant \frac{\pi}{4}$ und es gilt

$$x(t) < \tan(t + \frac{\pi}{4}) \ (t \in (0, \frac{\pi}{4})).$$

Index