

1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 3. November 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 1.1 K

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.
- b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
- c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt: $x^2 < xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < y^2$.
- d) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

Aufgabe 1.2 K

Überprüfen Sie mit Mitteln der Vorlesung, ob die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} beschränkt sind und bestimmen Sie gegebenenfalls Infimum, Supremum, Minimum und Maximum:

- a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 10 \text{ und } x^2 - 10x \leq 24\}$
- b) $M_2 = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$
- c) $M_3 = \left\{\frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\right\}$
- d) $M_4 = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 1.3

Es seien A, B nichtleere, beschränkte Teilmengen von \mathbb{R} . Zeigen Sie:

- a) $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$.
- b) $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\} = \sup A - \inf B$.

Aufgabe 1.4

- a) Es seien A, B nichtleere Teilmengen von \mathbb{R} mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt: $a \leq b$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $s \in \mathbb{R}$, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt: $a \leq s \leq b$.
- b) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $M \neq \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:
- (1) Aus $x \in M$, $y \in \mathbb{R}$ und $y < x$ folgt $y \in M$.
 - (2) Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $y \in M$ mit $y > x$.
- Zeigen Sie: M ist nach oben beschränkt und $M = \{x \in \mathbb{R} : x < \sup M\}$.

Wichtige Hinweise:

- Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann links neben dem Sekretariat Zimmer 305 abgeholt oder aus dem Internet von der Homepage zur Vorlesung heruntergeladen werden.
- Die beiden mit **K** gekennzeichneten Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden.
- Die bearbeiteten Aufgaben werden in die entsprechenden Einwurfschlitze rechts neben Zimmer 305 geworfen. Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen. **Zu spät abgegebene Lösungen werden nicht korrigiert!**
- **Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihres Tutoriums groß und deutlich oben auf jedes Blatt Ihrer Lösung.** Besteht Ihre Lösung aus mehreren Blättern, heften Sie diese bitte zusammen.
- Die Rückgabe der korrigierten Übungsblätter erfolgt in den Übungsgruppen. Nicht im Tutorium abgeholte Übungsblätter werden gegenüber von Zimmer 311 ausgelegt.
- Jede **K**-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Für den Übungsschein reichen jeweils 20 Punkte der ersten und zweiten fünf Übungsblätter sowie die Hälfte der Punkte der restlichen Übungsblätter aus. Der Übungsschein wird benotet.