Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 10. November 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 2.1 K

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

d) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

Aufgabe 2.2 K

Geben Sie für die folgenden a_n geschlossene Ausdrücke an und beweisen Sie diese:

a) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{a_n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$

b) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_n} + 2n + 1}, \quad n \in \mathbb{N};$

c) $a_0 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{10 - 2a_n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$

d) $a_1 = 84, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$

Aufgabe 2.3

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m+1}{k} = (-1)^n\binom{m}{n}$.

Aufgabe 2.4

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq \mathbb{R}$ eine höchstens abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ höchstens abzählbar ist.