Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 17. November 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 3.1 K

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$. Zeigen Sie:

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \max\{x, y\}.$$

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{2} < 1 + \dfrac{1}{n+1}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.2 K

Testen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{(n-2)^2 - n^2}{n}$,

b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$,

c) $a_n = \dfrac{3^n + (-4)^n}{(-3)^n + 4^n}$,

d) $a_n = \dfrac{7n^7(1 + \frac{1}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3 + 2)(n^5 + \sqrt{n+1})n^2}$.

Aufgabe 3.3

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Aufgabe 3.4

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

b) Es sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge und a eine reelle Zahl. Zeigen Sie:

$$\text{Aus} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{folgt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$