Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 24. November 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 4.1 K

Gegeben seien $a, b > 0$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right), \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte, monotone Folge. Bestimmen Sie den Limes!

Aufgabe 4.2

Es sei $0 < a < b$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

Aufgabe 4.3 K

Testen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$,

b) $a_n = \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^n$,

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$,

d) $a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$,

e) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$,

f) $a_n = \sqrt[n]{2 + \frac{n-1}{n+1}}$,

Aufgabe 4.4

Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

a) $|a_n^2 + 2a_{n+1}| < \varepsilon$,

b) $|a_n| < \varepsilon^2 + \varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}$,

c) $|a_n| < n\varepsilon$,

d) $|a_{n+1}| < \varepsilon |a_n|$.