Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

5. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 1. Dezember 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 5.1 K

Bestimmen Sie jeweils die Menge der Häufungswerte sowie Limes superior und Limes inferior der Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = n\big(1+(-1)^n\big)$,

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{3n+2}$,

c) $a_n = \left(\dfrac{n+(-1)^n}{1+n(-1)^{n+1}}\right)^n$,

d) $a_n = \big(1+(-1)^n\big)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Aufgabe 5.2 K

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen mit $a_n, b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

b) Unter welchen der folgenden Bedingungen gilt in a) sogar "="?

(i) Keine weiteren Bedingungen.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.

Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5.3

Gegeben sei eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq a > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass auch die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}$$

gilt.

Gilt eine analoge Formel auch für $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$?

Aufgabe 5.4

Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gelte

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.