

6. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 8. Dezember 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 6.1 K

- a) Es sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen und die Folge $\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sei beschränkt. Beweisen Sie:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

- b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass die Folge $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 6.2 K

Testen Sie die angegebenen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \binom{3n}{n}^{-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \alpha^n \quad (\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \geq 0)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \quad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 6.3

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei monoton fallend und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie den Reihenwert folgender Reihen:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}$

Evaluation der Lehrveranstaltung Analysis I

Liebe Studierende,

in der Woche vom 11.12. bis zum 15.12. wird eine Vorlesungsbefragung via Internet durchgeführt. Sie erhalten dazu in der ersten Vorlesung dieser Woche ein einmal gültiges Passwort (TAN) und eine zugehörige URL (Internet-Adresse). Sie können also von jedem Rechner mit Internetzugang auf den Fragebogen zugreifen. Selbstverständlich steht Ihnen in dieser Woche auch unser Rechnerpool (Raum -125 im Keller des Mathematik-Gebäudes) zur Verfügung. An den Rechnern können Sie sich mit Benutzername 'eval' und Passwort 'eval' anmelden. Ein Browser öffnet sich dann automatisch mit der Evaluationsseite.

Bitte füllen Sie den Fragebogen aus. Sie helfen uns, die Qualität unserer Lehre weiter zu verbessern. Danke!

Claus-Günther Schmidt (Studiendekan der Fakultät für Mathematik)

P.S.: Unter

<https://evasys.geist-soz.uni-karlsruhe.de/evasys/indexstud.php>

können Sie sich einen Beispielfragebogen vorab anschauen. Als Passwort (TAN) müssen Sie 'demo§_§vl' (für Vorlesungen) bzw. 'demo§_§sem' (für Seminare) eingeben.