Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

7. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 15. Dezember 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 7.1 K

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent } \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ ist konvergent.}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ und $t_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i a_{2^i}$ gilt:

$$\frac{1}{2} t_n \leq s_{2^n} \leq t_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

b) Zeigen Sie, dass in a) auf die Voraussetzung der Monotonie von $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

c) Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist konvergent } \iff \alpha > 1.$$

Aufgabe 7.2 K

a) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, divergiert.

Aufgabe 7.3

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < |q| < 1$. Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n$ mit Hilfe geeigneter Cauchyprodukte.

Aufgabe 7.4

a) Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Weiter sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und die Folge $(\varphi(k) - k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei beschränkt. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

b) Es sei $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\varphi(3k) = 2k\,, \quad \varphi(3k-1) = 4k-1\,, \quad \varphi(3k-2) = 4k-3 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Beweisen Sie:

(i) Die Folge $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{4k-3} + a_{4k-1} + a_{2k} = \frac{1}{2}(a_{2k-1} + a_{2k}) + (a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k})\,.$$

(iii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ ist konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Evaluation der Lehrveranstaltung Analysis I

Liebe Studierende,

in der Woche vom 11.12. bis zum 15.12. wird eine Vorlesungsbefragung via Internet durchgeführt. Sie erhalten dazu in der ersten Vorlesung dieser Woche ein einmal gültiges Passwort (TAN) und eine zugehörige URL (Internet-Adresse). Sie können also von jedem Rechner mit Internetzugang auf den Fragebogen zugreifen. Selbstverständlich steht Ihnen in dieser Woche auch unser Rechnerpool (Raum -125 im Keller des Mathematik-Gebäudes) zur Verfügung. An den Rechnern können Sie sich mit Benutzername 'eval' und Passwort 'eval' anmelden. Ein Browser öffnet sich dann automatisch mit der Evaluationsseite.

Bitte füllen Sie den Fragebogen aus. Sie helfen uns, die Qualität unserer Lehre weiter zu verbessern. Danke!

Claus-Günther Schmidt (Studiendekan der Fakultät für Mathematik)

P.S.: Unter

`https://evasys.geist-soz.uni-karlsruhe.de/evasys/indexstud.php`

können Sie sich einen Beispielfragebogen vorab anschauen. Als Passwort (TAN) müssen Sie 'demo§_§vl' (für Vorlesungen) bzw. 'demo§_§sem' (für Seminare) eingeben.