Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

8. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 22. Dezember 2006, 11:30 Uhr

Aufgabe 8.1 K

a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in (-R, R)$.

   (ii) $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie: $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in (-R, R)$ genau dann, wenn $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, und Konvergenzradius $R > 1$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

d) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge mit $\liminf_{n \to \infty} a_n > 0$.
   Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Aufgabe 8.2 K

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n} + 1}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{(4 + (-1)^n)^{3n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} x^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$;

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{7^n + 1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$.

Aufgabe 8.3

Es sei M die Menge aller natürlicher Zahlen, deren Dezimaldarstellung keine 9 enthält. Zeigen Sie:

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} \quad \text{ist konvergent}\,.$$

Bestimmen Sie weiterhin eine obere Schranke für den Reihenwert.

Aufgabe 8.4

a) Zeigen Sie: Besitzt eine Zahl $0 \leq a < 1$ eine g-adische Entwicklung der Form $0, z_1 z_2 \ldots z_m \overline{z_{m+1} z_{m+2} \ldots z_{n+m}}$ (der überstrichene Ziffernblock wiederholt sich periodisch) mit $m, n \in \mathbb{N}_0$, so gilt $a \in \mathbb{Q}$.

b) Welche rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ wird durch die 4-adische Entwicklung $0, \overline{0123}$ dargestellt?