Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 12. Januar 2007, 11:30 Uhr

Aufgabe 9.1 K

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften $f(0) = 1$ sowie $f(x+y) \leq f(x)\cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f im Nullpunkt stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe nun die Eigenschaft $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist f in 0 stetig, so gilt $f(x) = ax$ mit einer geeigneten Konstanten $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.2 K

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}\left(\dfrac{1}{x+a} - \dfrac{1}{a}\right), \quad a \neq 0$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^{3/2} - x^{3/2}}{\sqrt{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{\cos(x) - 1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Aufgabe 9.3

Untersuchen Sie, an welchen Stellen ihres Definitionsbereiches die folgenden Funktionen stetig sind:

a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]},$

c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \inf\{|nx - 1| : n \in \mathbb{N}\}.$

Hinweis zu (b): Für $x \in \mathbb{R}$ ist $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Aufgabe 9.4

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}, \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{1, 3\}, \quad f(1) = a, \quad f(3) = b\,.$$

Bestimmen Sie a und b so, daß f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Es seien $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} (f(x))^2$ existiert $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert.

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) + g(x))$ existieren $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)g(x))^2$ existiert.

(iii) f ist beschränkt und $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x) = 0$.

Aufgabe 9.5

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - x \right)$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$;

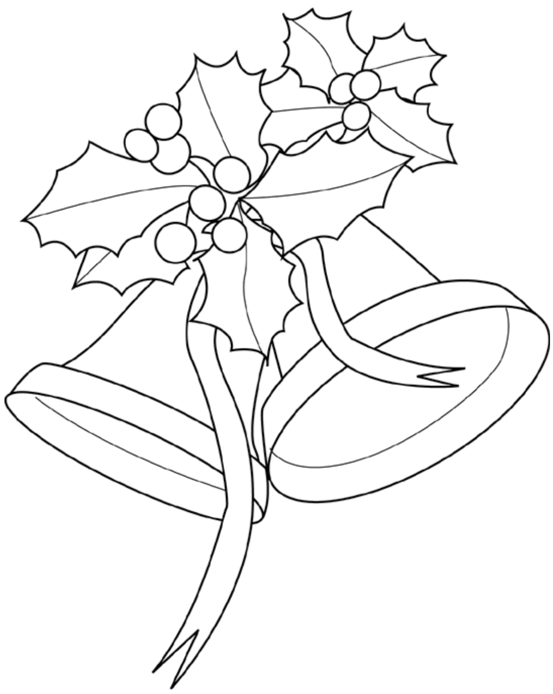
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+3x}}{x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 5-} \left[x + (x - [x])^3 \right]$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2(x+1)(x^2-4)}{|x|^3}$.

f) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\dfrac{1}{x} \right]$;

Hinweis zu (d) und (f): Für $x \in \mathbb{R}$ ist $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$.



Frohe Weihnachten und alles Gute für 2007!