Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

10. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 19. Januar 2007, 11:30 Uhr

Aufgabe 10.1 K

a) Zeigen Sie: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = g(\xi)$.

b) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ ist konstant.

c) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

d) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, und es gelte: Jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist beschränkt. Zeigen Sie, dass D beschränkt und abgeschlossen ist.

Aufgabe 10.2 K

a) Es sei $f : [0,e] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x^2 - 1) & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ \log(x^3) & \text{für } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig? Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

b) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Logarithmus-Funktion:

(i) $\dfrac{\log x + \log y}{2} \leq \log \dfrac{x+y}{2}$ für alle $x, y > 0$;

(ii) $\log x < x - 1$ für $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

Aufgabe 10.3

a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass D genau dann ein Intervall ist, wenn jede stetige Funktion $f : D \to \{0,1\}$ konstant ist.

b) Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall I stetig. Ferner gelte $(f(x))^2 = (g(x))^2$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ oder $f(x) = -g(x)$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 10.4

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte: $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) Es sei die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie: Ist f monoton (d.h. monton wachsend oder fallend), so hat f in $[a,b]$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.