Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

11. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 26. Januar 2007, 11:30 Uhr

Aufgabe 11.1 K

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch
$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (cx(1-x))^n,$$
auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch
$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+(nx)^3}.$$
Bestimmen Sie alle $a \in [0,\infty)$, für die $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,\infty)$ gleichmäßig konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 11.2 K

a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, und es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f auf D, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \Big(f_n(x_n) - f(x_n)\Big) = 0\,.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsender Funktion. Weiter gelte

(i) $f_n(0) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0\,.$

Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen 0.

Aufgabe 11.3

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+(nx)^2}$; (ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$.

b) Untersuchen Sie folgende Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$.

Aufgabe 11.4

Die Fibonaccifolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $a_1 = a_0 = 1$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mindestens für alle $|x| < \frac{1}{2}$ konvergiert.

b) Es seien α und β, $\alpha < \beta$, die beiden Nullstellen des Polynoms $1 - x - x^2$.

Zeigen Sie: $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}(x-\alpha)} - \dfrac{1}{\sqrt{5}(x-\beta)}$ für $|x| < \frac{1}{2}$.

c) Geben Sie mit Hilfe des Identitätssatzes für Potenzreihen eine explizite Darstellung der Folgenglieder a_n an.