Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 2. Februar 2007, 11:30 Uhr

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 12.1 K

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie: Es existieren Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \leq c|x| + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ existiere ein $L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; L\sqrt{|x-y|} \qquad \text{für alle } x, y \in D\,.$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf D ist.

c) Die Funktion $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Beweisen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig auf $[a, b)$ ist, wenn $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 12.2

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

b) Die Funktionen $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig ist und bestimmen Sie eine mögliche Lipschitz-Konstante.

Aufgabe 12.3 K

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \leq 0$ die Abschätzung $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$ gilt.

b) Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, auf (a, b) differenzierbar und es gelte $\lim\limits_{x \to b-} f'(x) = r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in b differenzierbar ist und $f'(b) = r$ gilt.

c) Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es gelte $|f(x)| + |f'(x)| \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass f in $[a, b]$ höchstens endlich viele Nullstellen hat.

Aufgabe 12.4

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in allen Punkten des Definitionsbereichs, in denen sie existiert:

a) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = x^{x^x}$;

b) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = (x^x)^x$;

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad f(x) = \log|e^x - 1|$;

d) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |x|^3$.