Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

13. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 9. Februar 2007, 11:30 Uhr

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 13.1 K

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen für jeden Punkt x_0 des Definitionsbereiches eine Reihenentwicklung um x_0 und geben Sie jeweils den Konvergenzradius der Reihe an:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Aufgabe 13.2 K

a) Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

(i) $\frac{1}{4}|x-y| \;\leq\; \left|\log\left(\frac{1+\arctan(x)}{1+\arctan(y)}\right)\right| \;\leq\; 8|x-y|$ für $x, y \in [-1, 1]$;

(ii) $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} (\cot x)^{\sin x}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\sin(4x)}$.

Aufgabe 13.3

a) Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es sei $f'(a) < f'(b)$. Zeigen Sie:

Für alle $r \in \big(f'(a), f'(b)\big)$ existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = r$.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - rx$.

b) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$?

Aufgabe 13.4

a) Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b), $f(a) \leq g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie:

$$f(x) < g(x) \text{ für alle } x \in (a, b]\,.$$

b) Es sei $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(1) = 1$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + (f(x))^2} \text{ für alle } x \in [1, \infty)\,.$$

Zeigen Sie: Der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiert und ist kleiner oder gleich $1 + \frac{\pi}{4}$.