Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

# 14. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

**Abgabe bis Freitag, 16. Februar 2007, 11:30 Uhr**

## Aufgabe 14.1 K

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen, dass $\int_0^1 e^x\,dx$ existiert, und berechnen Sie den Wert des Integrals.

b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f \in R([a,1])$ für alle $0 < a < 1$. Zeigen Sie, dass daraus folgt: $f \in R([0,1])$ und $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für die Funktion $f \in R([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)dx > 0$. Beweisen Sie, dass ein Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$ gilt.

## Aufgabe 14.2

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \left( \lim_{m\to\infty} (\cos(\pi n! x))^{2m} \right),$$

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beide Funktionen das obere und das untere Integral auf dem Intervall $[0,1]$.

## Aufgabe 14.3

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Funktion $f$ sei stetig und streng monoton wachsend in $[a,b]$, ferner sei $f^{-1}$ die Umkehrfunktion zu $f$. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a).$$

b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

**Aufgabe 14.4 K**

Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für die angegebenen Funktionen jeweils eine Stammfunktion.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-c)^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{c\};$

b) $f(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\};$

c) $f(x) = \tan x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\};$

d) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z})\};$

e) $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad x \in \mathbb{R};$

f) $f(x) = \frac{1}{(cx)^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$