Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

15. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Keine Abgabe!

Aufgabe 15.1

Testen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

a) $a_n = \dfrac{n+2+\cos(n)}{n\arctan(n)}$;

b) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)\log(k+2)\log\log(k+2)}$;

c) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = e^{-a_n}$;

d) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1)$.

Aufgabe 15.2

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge positiver Zahlen mit Grenzwert $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius r von

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{2^n} a_k\right)x^n.$$

Aufgabe 15.3

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 3\cdot 5^n - 3n^2 + 6n + 3.$$

a) Zeigen Sie: Die Formel $a_n = 5^n + 3n^2$ ist falsch. Trotzdem lässt sich der Induktionsschluss führen, d.h. unter der Annahme, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}_0$ stimmt, kann man zeigen, dass die Formel auch für $n+1$ richtig ist.

b) Bestimmen und beweisen Sie eine explizite Formel für die Folgenglieder a_n. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel aus a). Ist der Zusammenhang zufällig?

Aufgabe 15.4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\cos(x)}{(x+\cos(x))^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{(x^x)}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (x^x)^x$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2)-\cos(\sqrt{x})}{x^2-\sqrt{x}}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sinh(x))-\sinh(\sin(x))}{x^7}$.

Aufgabe 15.5

a) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$e \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$$
gilt. Berechnen Sie damit $\lim_{n\to\infty}(n!e - [n!e])$.

b) Bestimmen Sie $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-6} durch ein geeignetes Taylorpolynom.

Aufgabe 15.6

Es sei $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) f ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ ist 0.

Hinweis: Zeigen sie: $|f^{(2k)}(0)| \ge \frac{(2k)^{4k}}{2^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 15.7

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind:

(i) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0;$

(ii) $\arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x) \quad x \in [0, \pi/2].$

Wie groß ist jeweils die Konstante?

b) Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R};$

(ii) $\operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \in [1, \infty).$

Aufgabe 15.8

Es sei M eine dichte Teilmenge des Intervalls $[a,b]$, d.h. zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ und $x \in [a,b]$ existiert stets ein $m \in M$ mit $|x - m| < \epsilon$.

a) Die Funktionen $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien integrierbar und es gelte: $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

b) Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $M = [a,b]\backslash\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Funktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, welche nicht integrierbar ist und auf M mit f übereinstimmt.

Aufgabe 15.9

Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \implies \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = c\,.$$
Gilt auch die Umkehrung?