Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage.
Es gelte:

IA: $A(1)$ ist richtig.

IS: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underbrace{A(n) \text{ richtig}}_{\text{IV}} \implies A(n+1) \text{ richtig.}$$

Dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Zur letzten Aufgabe der 1. Übung

Definition (Induktionsmenge)

$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Induktionsmenge (IM)**, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $1 \in A$ und

(ii) $x \in A \implies x + 1 \in A$.

Außerdem definieren wir

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \text{ ist IM}} A.$$

Zur letzten Aufgabe der 1. Übung

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n := (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup [n+1, \infty)$.

Theorem

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: M_n ist Induktionsmenge.

Beweis: durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$

- IA $M_1 = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist Induktionsmenge (Beispiel aus der Vorlesung).
- IS Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen:

$$\underbrace{M_n \text{ ist Induktionsmenge}}_{\text{IV}} \implies M_{n+1} \text{ ist Induktionsmenge.}$$

(i) $1 \in M_{n+1}$, da $1 \in \mathbb{N}$ und $1 \in [1, n+1]$.

(ii) Es sei

$$\begin{aligned} x \in M_{n+1} &= (\mathbb{N} \cap [1, n+1]) \cup [n+2, \infty) \\ &= (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup (\mathbb{N} \cap (n, n+1]) \cup [n+2, \infty). \end{aligned}$$

Wir zeigen $x + 1 \in M_{n+1}$. Dazu unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall: $x \in \mathbb{N} \cap [1, n] \implies x + 1 \in \mathbb{N} \cap [2, n+1] \implies x + 1 \in M_{n+1}$.

2. Fall: $x \in [n+2, \infty) \implies x + 1 \in [n+3, \infty) \implies x + 1 \in M_{n+1}$.

3. Fall: $x \in \mathbb{N} \cap (n, n+1] \implies x \in \mathbb{N}$ und $x \in (n, n+1]$.
Annahme: $x \in (n, n+1)$
$\implies x \notin M_n \implies x \notin \mathbb{N}$ nach IV. Widerspruch!
Also: $x = n + 1$
$\implies x + 1 = n + 2 \in [n+2, \infty) \implies x + 1 \in M_{n+1}$.