Definition von Limes inferior und Limes superior

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei H die Menge ihrer HWe.

- *Definition der Vorlesung:* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min H \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max H.$$

- *Allgemeinere Definition:*
  1. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und $H \neq \emptyset$, definiere
  $$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min H.$$
  2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und $H \neq \emptyset$, definiere
  $$\limsup_{n\to\infty} a_n := \max H.$$

Aufgabe 5.1 a)

$$a_n = n\big(1 + (-1)^n\big) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ 2n & n \text{ gerade,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt :

- $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0 \implies 0$ ist HW.
- $a_{2k} = 4k$, d.h. $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt.

Also: Menge der HWe: $H = \{0\}$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt
  $\implies \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch 0, $H \neq \emptyset$
  $\implies \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min H = 0$.

Aufgabe zum Leibniz-Kriterium

$$a_n = (-1)^n \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Konvergiert sie absolut?

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut, denn (Minorantenkriterium):

$$b_n := |a_n| = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallende Nullfolge:

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{n(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{n(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(n+1)(\frac{n+1}{n})^n} \\ &= \frac{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \leq 1,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}(1+\tfrac{1}{n})^n = 0\cdot e = 0.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.