Häufungspunkte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.

x_0 **Häufungspunkt (HP)** von D

$$\iff \forall \delta > 0 : \quad D \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

$$\iff \forall \delta > 0 \; \exists x \in D\colon \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\iff \text{Es ex. Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Grenzwerte

Es seien $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a$$

$$\iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ gilt:}$$
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \; \forall x \in D \setminus \{x_0\} :$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon.$$

Stetigkeit

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

f stetig in x_0

$$\begin{aligned}
&\iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ gilt:} \\
&\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ \forall x \in D : \\
&\qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Stetigkeit und Häufungspunkte

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

1. Ist $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D, so gilt:
$$f \text{ stetig in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Ist $x_0 \in D$ **kein** Häufungspunkt von D, so ist f stetig in x_0.

Beweis:

1. f stetig in x_0
$$\begin{aligned} &\iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall x \in D : \\ &\qquad\qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \\ &\qquad\qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ &\overset{x_0\ \text{HP}}{\iff} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$
2. klar nach Definition von Häufungspunkt und Stetigkeit. $\square$