Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

1 Trigonometrische Funktionen

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	Ableitung
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

Einige Eigenschaften

a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

b) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

c) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\quad \cos(-x) = \cos(x)$,

d) $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$, $\quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$,
$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$,
$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$,

e) $\sin(x) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$,
$\cos(x) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Arcus-Funktionen

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	Ableitung
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x\rvert < 1)$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x\rvert < 1)$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

— bitte wenden —

2 Hyperbelfunktionen

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	Ableitung
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$1 - \coth^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

Einige Eigenschaften

a) $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$,

b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$,

c) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,
$\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,

d) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\qquad \cosh(-x) = \cosh(x)$,

Area-Funktionen

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	Ableitung
$\mathrm{Arsinh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{Arcosh}(x)$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1)$
$\mathrm{Artanh}(x)$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Arcoth}(x)$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2-1}$