Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

Zur 1. Übung Analysis I

Definition: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Induktionsmenge (IM)**, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $1 \in A$ und

(ii) $x \in A \implies x + 1 \in A$.

Außerdem definieren wir

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \text{ ist IM}} A.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n := (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup [n + 1, \infty)$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: M_n ist Induktionsmenge.

Beweis: durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang (IA):
$M_1 = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist Induktionsmenge (Beispiel aus der Vorlesung).

Induktionsschritt (IS):
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen:

$$\underbrace{M_n \text{ ist Induktionsmenge}}_{\text{Induktionsvoraussetzung (IV)}} \implies M_{n+1} \text{ ist Induktionsmenge.}$$

(i) $1 \in M_{n+1}$, da $1 \in \mathbb{N}$ und $1 \in [1, n + 1]$.

(ii) Es sei

$$\begin{aligned} x \in M_{n+1} &= (\mathbb{N} \cap [1, n + 1]) \cup [n + 2, \infty) \\ &= (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup (\mathbb{N} \cap (n, n + 1]) \cup [n + 2, \infty). \end{aligned}$$

Wir zeigen $x + 1 \in M_{n+1}$. Dazu unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall: Es sei $x \in \mathbb{N} \cap [1, n]$. Dann gilt $x \in \mathbb{N}$ und $x \in [1, n]$, also haben wir $x+1 \in \mathbb{N}$ und $x+1 \in [2, n+1] \subseteq [1, n+1]$. Somit gilt $x+1 \in M_{n+1}$.

2. Fall: Es sei $x \in [n + 2, \infty)$. Dann gilt $x + 1 \in [n + 3, \infty) \subseteq [n + 2, \infty)$, also wiederum $x + 1 \in M_{n+1}$.

3. Fall: Es sei $x \in \mathbb{N} \cap (n, n + 1]$. Dann gilt $x \in \mathbb{N}$ und $x \in (n, n + 1]$. Angenommen, es gälte $x \in (n, n + 1)$, so hätten wir $x \notin M_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist M_n eine Induktionsmenge. Da $\mathbb{N}$ der Schnitt aller Induktionsmengen ist, gälte dann auch $x \notin \mathbb{N}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $x \in \mathbb{N}$ steht.
Somit gilt $x = n + 1$ und folglich $x + 1 = n + 2 \in [n + 2, \infty)$, sodass auch in diesem Fall $x + 1 \in M_{n+1}$ gilt. $\square$