Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

WS 2006/07

Zur 2. Übung Analysis I

Behauptung: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}$ kann bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet werden.

Beweis: Wir definieren

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto n + \dfrac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} = n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+m-2} k. \end{cases}$$

Wir zeigen: φ ist bijektiv, d.h. φ ist injektiv und surjektiv.

(i) φ ist injektiv:

Es seien $(n,m), (N,M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\varphi(n,m) = \varphi(N,M)$.

Es ist zu zeigen: $(n,m) = (N,M)$, d.h. $n = N$ und $m = M$.

$$\begin{aligned} \varphi(n,m) = \varphi(N,M) \implies n + \sum_{k=1}^{n+m-2} k &= N + \sum_{j=1}^{N+M-2} j \\ \implies n - N &= \sum_{j=1}^{N+M-2} j - \sum_{k=1}^{n+m-2} k. \end{aligned}$$

Wenn wir gezeigt haben, dass $n + m = N + M$ ist, sind wir fertig, denn dann gilt $n - N = 0$ und damit $n = N$ und $m = M$.

Es ist also nur noch zu zeigen, dass $n + m = N + M$.

Annahme: $N + M > n + m$. Dann gilt:

$$n - N = \sum_{j=1}^{N+M-2} j - \sum_{k=1}^{n+m-2} k \geq N + M - 2 > n + m - 2 \implies m + N < 2.$$

Widerspruch!

Genauso führt die Annahme $n + m > N + M$ zum Widerspruch.

Also haben wir gezeigt, dass $n + m = N + M$.

(ii) φ ist surjektiv:

Es ist zu zeigen: $\forall\, k \in \mathbb{N} : \quad k \in \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

IA: $k = 1$
Es gilt: $1 = \varphi(1,1)$, also $1 \in \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

IS: Wir zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Ist } \underbrace{k \in \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}_{\text{IV}}, \text{ dann ist auch } k+1 \in \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

,

Es sei $k \in \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $k = \varphi(n, m)$.
Fall 1: $m > 1$

$$\varphi(n+1, m-1) = n + 1 + \sum_{k=1}^{n+m-2} k = \varphi(n, m) + 1 \overset{\text{IV}}{=} k + 1.$$

Fall 2: $m = 1$.

$$\varphi(1, n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + n + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \varphi(n, 1) \overset{\text{IV}}{=} 1 + k.$$

$\square$