Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Montag, 30. April 2007, 12:00 Uhr

Aufgabe 1.1 K

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} x \arcsin x \, dx;$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx;$

c) $\displaystyle\int_0^1 \tanh x \, dx;$

d) $\displaystyle\int_0^1 (x^5 + x^3) e^{-x^2} \, dx;$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tanh(x^4 \sin^3 x) \, dx;$

f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx.$

Aufgabe 1.2 K

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} \, dx;$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^x e^{-x^2} \, dx;$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x};$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}};$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x)\sqrt{x}} \, dx;$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^{7/8}} \, dx;$

Aufgabe 1.3

a) Zeigen Sie: Das Integral $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Berechnen Sie für $\alpha > 1$ den Wert des Integrals.

b) Es sei $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) \, dx.$

Aufgabe 1.4

a) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x) dx$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass dann $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt.

b) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x) dx$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass dann $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$ gilt.