Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

Lösungen zum 2. Übungsblatt Analysis II

Aufgabe 2.1

a) *Behauptung:* Das Integral $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ konvergiert für jedes $x > 0$.

Beweis: Es sei $x > 0$.

Für $t \in (0,1]$ gilt $|e^{-t}t^{x-1}| \leq t^{x-1}$, und das Integral $\int_0^1 t^{x-1}dt$ konvergiert (da $x - 1 < -1$). Also konvergiert das Integral $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

Die Funktion $t \mapsto e^{-t}t^{x+1}$ ist stetig auf $[1,\infty)$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-1}t^{x+1} = 0$. Also ist $t \mapsto e^{-t}t^{x+1}$ auf $[1,\infty)$ beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $c \in (0,\infty)$ mit $|e^{-t}t^{x-1}| = e^{-t}t^{x+1}\frac{1}{t^2} \leq \frac{c}{t^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also das Integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$. □

b) Für $x > 0$ ist die **Gamma-Funktion** durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ definiert.

(i) *Behauptung:* Für jedes $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Beweis: Es sei $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_r^R e^{-t}t^x dt \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \left(\big[-e^{-t}t^x\big]_r^R + \int_r^R e^{-t}xt^{x-1}dt \right) \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \left(-e^{-R}R^x + e^{-r}r^x + x\int_r^R e^{-t}t^{x-1}dt \right) \\
&= \lim_{r\to 0} e^{-r}r^x - \lim_{R\to\infty} e^{-R}R^x + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.
Beweis durch vollständige Induktion:
$n = 0$: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1 = 0!$.
$n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\Gamma(n+1) = n!$. Dann

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

□

Aufgabe 2.2

a) Es sei $x > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-s} \left(\frac{s}{n}\right)^x \frac{ds}{s} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R/n} e^{-nt} t^x \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt.$$

b) *Behauptung:* Das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ konvergiert für jedes $x > 1$.

Beweis: Es sei $x < 1$.
Da $\frac{t}{e^t-1} \to 1$ für $t \to 0+$, existiert ein $c \in (0, \infty)$, so dass für $t \in (0, 1]$ gilt: $|\frac{t^{x-1}}{e^t-1}| = t^{x-2}\frac{t}{e^t-1} \leq ct^{x-2}$. Da $\displaystyle\int_0^1 t^{x-2} dx$ für $x > 1$ konvergiert, folgt die Konvergenz von $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ aus dem Majorantenkriterium.
Für $t \in [1, \infty)$ gilt $|\frac{t^{x-1}}{e^t-1}| = \frac{1}{t^2}\frac{t^{x+1}}{e^t-1} \leq \frac{c}{t^2}$, da $\frac{t^{x+1}}{e^t-1} \to 0$ für $t \to \infty$. Die Konvergenz von $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ folgt nun aus dem Majorantenkriterium. □

c) Für $x > 1$ sei die **Riemannsche Zeta-Funktion** durch $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$ definiert.

Behauptung: Für alle $x > 1$ gilt $\displaystyle\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

Beweis: Es sei $x > 1$ und $N \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung von Teil a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(x)}{n^x} &= \sum_{n=1}^N \int_0^\infty e^{-nt} t^{x-1} dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nt} t^{x-1} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-(N+1)t} - e^{-t}}{e^{-t} - 1} t^{x-1} dt = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-Nt}}{e^t - 1} t^{x-1} dt.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\left|\sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(x)}{n^x} - \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt\right| = \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

Nach Teil b) konvergieren beide uneigentlichen Integrale. Wir fixieren nun ein $\epsilon > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt &= \int_0^\epsilon e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + \int_\epsilon^\infty e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \\ &\leq \int_0^\epsilon \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + e^{-N\epsilon} \int_\epsilon^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}0 \leq \limsup_{N\to\infty} \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt &\leq \int_0^\epsilon \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + \limsup_{N\to\infty} e^{-N\epsilon} \int_\epsilon^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \\ &= \int_0^\epsilon \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war und $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ konvergiert, folgt

$$\limsup_{N\to\infty} \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = 0,$$

also die Behauptung. □