

3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Montag, 14. Mai 2007, 12:00 Uhr

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ seien

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Aufgabe 3.1 K

- Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf \mathbb{R}^n sind.
- Geben Sie (abhängig von n) die kleinsten Konstanten c_1, c_2, c_3 an, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_\infty \leq c_1 \|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq c_3 \|x\|_\infty.$$

Aufgabe 3.2

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

- Wählt man auf \mathbb{R}^n die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, so folgt

$$\|A\| = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- Wählt man auf \mathbb{R}^n die Betragssummennorm $\|\cdot\|_1$, so folgt

$$\|A\| = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Aufgabe 3.3

Der Vektorraum \mathbb{R}^n sei versehen mit der Euklidnorm $\|\cdot\|_2$.

- Sind die Elemente $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonal, d.h. $x_i \cdot x_j = 0$ für $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$), so gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|_2^2.$$

- Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

Aufgabe 3.4 K

Bestimmen Sie für folgende Teilmengen von \mathbb{R}^2 das Innere, den Rand und den Abschluss. Welche Mengen sind offen bzw. abgeschlossen?

- a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$,
c) $\left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$,
- b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \times (0, n)$,
d) \emptyset .

Diplomvorprüfung bzw. Zwischenprüfung Analysis I/II

Herbst 2007

- **Termin:**
Donnerstag, 27. September 2007, 8–10 Uhr (Teil 1) und 11–13 Uhr (Teil 2).
- **Anmeldung:**
 - Informatiker, Physiker und Lehramtskandidaten in Zimmer 305 (Frau Ewald, Frau Schreiber-Schmoeger)
Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Prüfungsamt mitzubringen!
 - Diplommathematiker in Zimmer 323 (Dr. Kühnlein)
 - Wirtschaftsmathematiker in Zimmer 115 (Dr. Neher)
 - Technomathematiker in Zimmer 206.1 (Dr. Hettlich)
- **Anmeldeschluß: Dienstag, 31. Juli 2007**
- Die **Hörsaaleinteilung** wird rechtzeitig bekannt gegeben!
www.mathematik.uni-karlsruhe.de/milweis/~schmoeger/seite/einteilung/