Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Montag, 21. Mai 2007, 12:00 Uhr

Aufgabe 4.1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{y}{x^2} & \text{für } 0 < y \le x^2, \\ \frac{x^2}{y} & \text{für } 0 < x^2 \le y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\lim\limits_{t \to 0+} f(ta, tb) = 0$.

b) Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen von f.

Aufgabe 4.2 K

a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(xy))\sin(xz)}{x^3y^2}, & xy \neq 0\,, \\ \dfrac{z}{2}, & xy = 0\,. \end{cases}$

Bestimmen Sie alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, in denen f stetig ist.

b) Es sei $\alpha > 0$ und $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|\sin(xyz)|^\alpha}{x^4+z^4}, & x \neq 0 \text{ oder } z \neq 0\,, \\ 0\,, & x = z = 0\,. \end{cases}$

Bestimmen Sie alle $\alpha > 0$, für die g stetig auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 4.3

Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{conv}(S) = \begin{cases} \{\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \ :\ m \in \mathbb{N},\ x_j \in S,\ \lambda_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1\}, & S \neq \emptyset, \\ \emptyset, & S = \emptyset \end{cases}$$

die **konvexe Hülle** von S. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) $\operatorname{conv}(S)$ ist konvex, d.h. mit $a, b \in \operatorname{conv}(S)$ gehört auch die Verbindungsstrecke $\{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$ zu $\operatorname{conv}(S)$.

b) Ist S offen, so ist auch $\operatorname{conv}(S)$ offen.

c) Ist S abgeschlossen, so ist auch $\operatorname{conv}(S)$ abgeschlossen.

— bitte wenden —

Aufgabe 4.4 K

Es sei K eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Ist $\|\cdot\|$ die Euklidnorm auf $\mathbb{R}^n$, so existiert genau ein $x_0 \in K$ mit $\|x_0\| = \inf_{x \in K} \|x\|$.

b) Ist $\|\cdot\|$ die Maximumnorm oder die Betragsummennorm auf $\mathbb{R}^n$, so gilt die Behauptung aus a) im allgemeinen nicht.

c) Die Behauptung aus a) gilt auch, wenn man nur voraussetzt, dass $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex ist.

Am Freitag, 18. Mai 2007, findet keine Übung statt!
