Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

5. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Dienstag, 29. Mai 2007, 10:00 Uhr

Aufgabe 5.1 K

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

b) $f \notin C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Aufgabe 5.2 K

Auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und $E = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$ seien die beiden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\log(xy), \cos(x^2+y), e^x), \\ g(u,v,w) &= e^u + vw + \log w. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ auf D differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

a) nach der Kettenregel,

b) direkt (durch Ableiten von h).

Aufgabe 5.3

Es sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := yg(x)\,.$$

Zeigen Sie: f ist in $(0,0)$ differenzierbar $\iff$ g ist in 0 stetig.

Aufgabe 5.4

Es sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Weiter sei $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ und es existiere ein $M > 0$ mit $\|f'(x,y)\| \leq M$ für alle $(x,y) \in G$. Zeigen Sie:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq 2M\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| \qquad \text{für alle } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G\,.$$