Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

6. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Montag, 4. Juni 2007, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.1 K

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}$ im Nullpunkt existieren und berechnen Sie diese. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < y < x^2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}$ im Nullpunkt existieren und berechnen Sie diese. Ist f in $(0,0)$ stetig ?

Aufgabe 6.2

Es seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : K \to \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Ist K kompakt und gelten $f(K) \subseteq K$ sowie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$, so besitzt f genau einen Fixpunkt $x_0 \in K$.

b) Ist K kompakt und gelten $f(K) \supseteq K$ sowie $\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\|$ für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$, so besitzt f genau einen Fixpunkt $x_0 \in K$.

c) In a) bzw. b) können "$<$" bzw. "$>$" nicht durch "$\leq$" bzw. "$\geq$" ersetzt werden.

d) In a) bzw. b) kann im allgemeinen nicht auf die Kompaktheit von K verzichtet werden.

Aufgabe 6.3 K

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \left(e^x + e^{-y},\; e^{x+y}\right).$$

Zeigen Sie: Es existiert eine offene Umgebung U des Punktes $(0,0)$ und eine offene Umgebung V des Punktes $(2,1)$, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ die Ableitung an der Stelle $(2,1)$.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = ((2 + \arctan x)\sin y,\ -e^x \cos y).$$

Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung U existiert, sodass $f : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv?

Aufgabe 6.4

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und nicht konstant. Weiter sei $f(1) = 0$ und $f'(1) \neq 1$. Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$ und eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(1,1) = 1$ und

$$g(x,y) = x + yf(g(x,y))$$

für jedes $(x,y) \in U$. Berechnen Sie $g_y(1,1)$.

b) Zeigen Sie: Für hinreichend kleine $x, y \in \mathbb{R}$ kann man die Gleichung

$$e^{\sin xy} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

nach y auflösen.

Achtung Raumänderung!

Ab Freitag, 1. Juni 2007, findet die Übung im Hörsaal 37 (Architekturgebäude) statt!
