Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

8. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Montag, 18. Juni 2007, 12:00 Uhr

Aufgabe 8.1 K

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils die Art des Extremums an:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{3}{2}x^2y^2$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$.

Aufgabe 8.2

a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils die Art des Extremums an:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2y + zy + \frac{2}{3}x^3 + 2y^2 + z^2$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(xy)$.

b) Die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ habe die folgenden Eigenschaften:

$$f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, \quad f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\} .$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $||x_0|| < 1$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{x_ix_i}(x_0) \geq 0$.

Aufgabe 8.3

Zeigen Sie: Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Aufgabe 8.4 K

a) Zeigen Sie:

$$\max\{xyz : x, y, z > 0,\ x + y + z = 1\} = \frac{1}{27}.$$

b) Es sei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\} \text{ und } B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}$$

und

$$d(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A,\ b \in B\},$$

der Abstand der Mengen A und B.

Zeigen Sie, dass Elemente $a \in A$, $b \in B$ existieren mit $d(A, B) = \|a - b\|$. Berechnen Sie $d(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange für die Funktion $f(a, b) = \|a - b\|^2$, $a, b \in \mathbb{R}^2$.