Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

# 10. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

**Abgabe bis Montag, 2. Juli 2007, 12:00 Uhr**

## Aufgabe 10.1 K

a) Welche der Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ besitzt eine Stammfunktion? Geben Sie diese gegebenenfalls an:

(i) $f(x, y, z) = (y^2 + 2xyz^3, 2y + x^2z^3, y^2 + 3yx^2z^2)$,

(ii) $f(x, y, z) = (z^2, e^z, ye^z + 2xz)$,

b) Es sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 - t, t^2, 0)$. Berechnen Sie für die Funktionen aus Teil a) jeweils das Wegintegral

$$\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) \,.$$

## Aufgabe 10.2 K

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

a) Zeigen Sie, dass $f$ der Integrabilitätsbedingung genügt.

b) Prüfen Sie, ob $f$ in folgenden Gebieten eine Stammfunktion besitzt, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

(i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

## Aufgabe 10.3

Es sei $g \in C((0, \infty), \mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f(x) = g\big(\|x\|\big)x \,.$$

Zeigen Sie, dass $f$ eine Stammfunktion besitzt und bestimmen Sie eine solche. Was sind die Stammfunktionen von $f$ im Fall $g(t) = t^m$ $(m \in \mathbb{Z})$?

— bitte wenden —

**Aufgabe 10.4**

Es sei $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{für} \quad \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

und $f(t+2) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Es sei

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t)\,, \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

Zeigen Sie: $\gamma : [0, \frac{1}{3}] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist ein Weg und es gilt: $\gamma([0, \frac{1}{3}]) = [0,1] \times [0,1]$. Ist $\gamma$ rektifizierbar?

*Hinweis:* Zu $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$ existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \{0,1\}$, mit

$$(x_0, y_0) = \Big( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n} \Big).$$

Betrachten Sie $f(3^k t_0)$ mit $t_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n-1} a_n$.

---

# Diplomvorprüfung bzw. Zwischenprüfung Analysis I/II

# Herbst 2007

---

- **Termin:**
  Donnerstag, 27. September 2007, 8–10 Uhr (Teil 1) und 11–13 Uhr (Teil 2).
- **Anmeldung:**
  - Informatiker, Physiker und Lehramtskandidaten in Zimmer 305 (Frau Ewald, Frau Schreiber-Schmoeger)
    Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Prüfungsamt mitzubringen!
  - Diplommathematiker in Zimmer 323 (Dr. Kühnlein)
  - Wirtschaftsmathematiker in Zimmer 115 (Dr. Neher)
  - Technomathematiker in Zimmer 206.1 (Dr. Hettlich)
- **Anmeldeschluß: Dienstag, 31. Juli 2007**
- Die **Hörsaaleinteilung** wird rechtzeitig bekannt gegeben!
  `www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1weis/~schmoeger/seite/einteilung/`