

## 11. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

---

Abgabe bis Montag, 9. Juli 2007, 12:00 Uhr

### Aufgabe 11.1 K

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|f\|_1 < \infty$ . Zeigen Sie:

a) Für  $a \in \mathbb{R}^n$  und die Funktion

$$f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) := f(x - a)$$

gilt  $\|f_a\|_1 = \|f\|_1$ .

b) Ist  $b > 0$ , so gilt für die Menge  $A_b := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > b\}$  gilt:  $\|1_{A_b}\|_1 < \infty$ .  
Außerdem gilt  $\lim_{b \rightarrow \infty} \|1_{A_b}\|_1 = 0$ .

### Aufgabe 11.2

Sei  $(r_n)_{n \geq 1}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ,  $A_n := (r_n, r_n + n^{-3})$  und  $f := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1_{A_n}$ .

Zeigen Sie:

a)  $\|f\|_1 < \infty$ ;

b)  $\|f^2\|_1 = \infty$ .

### Aufgabe 11.3 K

Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Quadern in  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k) < \infty.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $B_m := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist in mindestens zwei der Mengen } A_1, \dots, A_m\}$ .  
 $B := \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ . Zeigen Sie:

a)  $1_{B_m} \in \tau_n$ ;

b)  $\int 1_{B_m}(x) dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m v_n(A_k)$ ;

c)  $\|1_B\|_1 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k)$ .

### Aufgabe 11.4

Für  $A \subseteq \mathbb{R}$  gelte  $\|1_A\|_1 = 0$ . Zeigen Sie: Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig, so gilt auch  $\|1_{f(A)}\|_1 = 0$ .