

## 12. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

---

Abgabe bis Montag, 16. Juli 2007, 12:00 Uhr

### Aufgabe 12.1 K

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a)  $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} d(x,y)$ ,  $A = [1, 2] \times [3, 4]$ ;
- b)  $\int_B \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} d(x,y)$ ,  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
- c)  $\int_C x d(x,y,z)$ ,  $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$ ;
- d)  $\int_D \frac{\sin(x)}{x} d(x,y)$ ,  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ .

### Aufgabe 12.2 K

- a) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  
Man beweise:

$$\int_{A \times B} f(x)g(y) d(x,y) = \left( \int_A f(x) dx \right) \left( \int_B g(y) dy \right).$$

- b) Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und positiv.  
Dann gilt:

$$\left( \int_A f(x) dx \right) \left( \int_A \frac{1}{f(x)} dx \right) \geq \left( \int_A 1 dx \right)^2.$$

### Aufgabe 12.3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a)  $\int_{[0,1]^n} f_n(x) dx$  mit  $f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ ;
- b)  $\int_A \frac{2xy}{x^2 - y} d(x,y)$ ,  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y+1 \leq x^2 \leq y+e^y\}$ .

### Aufgabe 12.4

Sei  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ . Man nennt  $x \in \mathbb{R}^n$  einen Lebesgue-Punkt von  $f$ , falls gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{v_n(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass jeder Stetigkeitspunkt von  $f$  auch Lebesgue-Punkt von  $f$  ist.
- b) Es sei nun  $n = 1$ . Zeigen Sie, dass die durch

$$F(x) := \int_{(-\infty, x]} f(y) dy$$

definierte Funktion in jedem Lebesgue-Punkt  $x \in \mathbb{R}$  von  $f$  differenzierbar ist mit  $F'(x) = f(x)$ .

---

## Achtung Raumänderung!

**Am Freitag, 13. Juli 2007, findet die Übung ausnahmsweise  
im Gaede-Hörsaal statt!**

---

Auch in diesem Jahr wird es wieder das traditionelle

## Sommerfest

unserer Fakultät geben. Der Termin liegt diesmal am

**Freitag, dem 13. Juli 2007.**

Wie üblich findet das Fest auf dem Gelände des Sportinstituts statt. Alle Mitglieder der Fakultät für Mathematik sind herzlich dazu eingeladen.

Den Auftakt bildet wieder das Fußballspiel zwischen Dozenten und Studierenden. Anstoß des Fußballspiels: 18.00 Uhr. Studierende, die am Fußballspiel teilnehmen möchten, sollten sich bei der Fachschaft Mathematik melden.

Nach dem Spiel können wir am Tennishaus grillen und feiern. Getränke und Brot werden wieder bereit gestellt, aber Grillgut (Würstchen, Steaks, ... ) soll sich jeder selbst mitbringen. Hauptattraktion des abendlichen Fests wird wieder ein musikalisches Programm sein, das unter der bewährten Leitung des Prorektors von bekannten und neu entdeckten Talenten an unserer Fakultät präsentiert wird.

Wir hoffen wieder auf rege Beteiligung, gutes Wetter und ein fröhliches Fest.